

UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA

“Análisis y Evaluación del Throughput
Máximo en Sistemas de Transmisión con
Modulación y Codificación Adaptativas
utilizando el Límite de Gallager”

Tesis Presentada por Alex Enrique Alvarado Segovia
como requisito parcial para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería Electrónica
Area de Sistemas Computacionales y de Telecomunicaciones,
y como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Civil Electrónico
Mención Telecomunicaciones

Profesores Guía:
Rodolfo Feick y Leszek Szczecinski

*A mis padres y mi hermano
que siempre me guiaron y
acompañaron en esta etapa
de mi vida.*

Resumen

Si bien las comunicaciones actuales demandan necesidades que en general son diversas, el común denominador de éstas es siempre un aumento en las de necesidades de tasa de transmisión. Por otro lado, en el último tiempo los sistemas de comunicaciones han enfocado su atención en sistemas inalámbricos debido a la ventaja inherente de movilidad que éstos poseen, sin embargo, y debido a que el espectro electromagnético es el recurso mas escaso en un sistema de este estilo, ha sido necesario investigar técnicas que permitan aumentar la tasa de transmisión sin sacrificar ancho de banda.

Dentro de este marco, la Modulación y Codificación Adaptativa (Adaptive Modulation and Coding, AMC) surgió hace unas décadas como una prometedora técnica que permitiría aumentar la eficiencia de las técnicas estáticas de modulación y codificación ya que explotaba la característica variante en el tiempo del canal de comunicaciones, la cual es típica de un canal de comunicaciones inalámbricas.

En este trabajo de tesis se pretende abordar el problema de la elección óptima de los parámetros de transmisión, específicamente el esquema de modulación y la tasa de código utilizados, para un sistema de comunicaciones que opere utilizando AMC. Adicionalmente se desea analizar las cotas máximas a nivel de capacidad de canal que un sistema de este tipo posee así como también la dependencia que existe entre estas cotas y restricciones prácticas del sistema. Para el análisis del problema se propone hacer uso del denominado “Límite de Gallager” (Gallager Bound, GB) el cual permite acotar la probabilidad de error de bloque para un código cualquiera tomando en consideración el largo del bloque y la tasa de código utilizados. Finalmente, se espera poder comparar los resultados de máximo desempeño del sistema con la simulación de códigos con elevada capacidad correctora de errores que posean aplicaciones prácticas como son los Turbo Códigos.

Índice general

1.	Introducción	10
2.	Marco Teórico	14
2.1.	Modelo del Sistema	14
2.2.	Capacidad de Canal	17
2.2.1.	Límite de Shannon	18
2.2.2.	Capacidad de Modulación Codificada	19
2.2.3.	Capacidad BICM	22
2.3.	Modulación y Codificación Adaptativa	25
2.4.	Turbo Códigos	29
2.4.1.	Estructura básica	29
2.4.2.	Turbo codificador	31
2.4.3.	Turbo decodificador	36
2.5.	Razones Logarítmicas de Máxima Verosimilitud	38
2.5.1.	Definición de las LLR	38
2.5.2.	LLR para canal AWGN	39
2.5.3.	LLR simplificadas para canal AWGN	40
2.5.4.	Distribución de las LLR	41
2.6.	El Límite de Gallager	44
3.	Análisis del Problema	47
4.	Resultados Numéricos	53
4.1.	Razones Logarítmicas de Máxima Verosimilitud	53
4.1.1.	Elección de parámetros de simulación	53
4.1.2.	Validación de las simulaciones	55
4.2.	Capacidad de Canal	57
4.2.1.	Capacidad de Modulación Codificada	58

Índice general	3
4.2.2. Capacidad BICM	58
4.3. Aplicación del Límite de Gallager	59
4.3.1. Esquema de modulación y tasa de código óptimos	60
4.3.2. Restricciones en el largo del bloque	61
4.3.3. Comportamiento de los umbrales de cambio de esquema de modulación	64
4.3.4. Uso de métricas simplificadas.	68
4.3.5. Canal con desvanecimientos lentos	69
4.4. Comparación con Turbo Códigos	70
4.4.1. Selección de los parámetros	71
4.4.2. Resultados obtenidos	72
5. Conclusiones	75
Bibliografía	77
6. Anexos	82
6.1. Anexo A: Constelaciones utilizadas	82
6.2. Anexo C: Parámetros utilizados en los Turbo Códigos	88

Índice de figuras

2.1.	Diagrama de bloques del Sistema.	15
2.2.	Capacidad C_M (\tilde{C}) versus Γ para diferentes esquemas de modulación para un canal AWGN. M -QAM (líneas sólidas) con $M \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$ ó M -PSK (líneas punteadas) con $M \in \{8, 16, 32\}$	23
2.3.	Modelo equivalente de canal para el sistema BICM.	24
2.4.	Capacidad BICM (\hat{C}) versus Γ para diferentes esquemas de modulación para un canal AWGN. M -QAM (líneas sólidas) con $M \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$ ó M -PSK (líneas punteadas) con $M \in \{8, 16, 32\}$	25
2.5.	Comparación esquemas de codificación concatenada.	30
2.6.	Esquema simplificado del turbo codificador utilizado.	31
2.7.	Esquema del codificador con polinomios generadores $G = [1, 11/15]_8$ con tamaño de memoria 3.	33
2.8.	Esquema simplificado del turbo decodificador.	37
2.9.	Constelación 16-QAM con mapeo Gray. Se muestran los valores del mapeo para el bit en la posición 4 y en la posición 2.	44
3.1.	Comparación entre el enfoque tradicional para evaluar el GB (arriba) y el nuevo enfoque propuesto en este trabajo (abajo).	48
4.1.	Comparación de histogramas calculados en forma analítica y los resultados de la simulación para distintos valores de SNR.	56
4.2.	Comparación del throughput máximo al utilizar expresiones analíticas para las pdfs dadas en la Sección 2.5.4 (línea continua) y la simulación de los histogramas (*).	57

4.3.	Capacidad BICM (\hat{C}) versus SNR para diferentes esquemas de modulación para un canal AWGN. M -QAM (líneas continuas) con $M \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$ ó M -PSK (líneas punteadas) con $M \in \{8, 16, 32\}$	59
4.4.	Comparación de capacidad BICM (\hat{C}) versus SNR para 8-PSK (líneas punteadas) y 8-QAM (líneas continuas) para un canal AWGN. Se destaca que no existe una constelación óptima en términos de capacidad de canal para todo el rango de SNR.	60
4.5.	Comparación entre \bar{C} (líneas segmentadas y líneas punteadas para esquemas M -QAM y M -PSK respectivamente) y \hat{C} (líneas continuas y líneas punteadas y segmentadas para esquemas M -QAM y M -PSK respectivamente) en función de SNR para distintos esquemas de modulación.	62
4.6.	Throughput máximo utilizando el GB (\bar{C}) (líneas segmentadas) y capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) para los tres esquemas de modulación óptimos y un largo de bloque $N_s = 1548$	63
4.7.	Tasas de Código óptimas para BICM (\hat{R}) (líneas continuas) y para el análisis usando el GB (\bar{R}) (líneas segmentadas) para los tres esquemas de modulación óptimos y un largo de bloque $N_s = 1548$	64
4.8.	Dependencia del máximo throughput al evaluar el GB (\bar{C}) para $N_s = 464$ (línea punteada), $N_s = 1548$ (línea segmentada), y $N_s = 15480$ (línea segmentada y punteada) en comparación con la capacidad BICM (\hat{C}) (línea continua) para los tres esquemas de modulación óptimos.	65
4.9.	Comparación entre enfoque que considera un valor de M constante (líneas punteadas), el enfoque que considera un valor de N_s constante (líneas segmentadas) y la capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) para los tres esquemas de modulación óptimos. Para los tres casos se considera $M = N_s = 464$	66

4.10.	Umbrales de cambio de esquema de modulación γ_0 (arriba) y γ_1 (abajo) para diferentes largos de bloque obtenidos al evaluar el GB con métricas calculadas en forma exacta (2.47) (líneas punteadas con ‘o’) y con aproximación Max-Log (2.51) (líneas punteadas con ‘•’) y al utilizar el enfoque de capacidad BICM (líneas segmentadas).	67
4.11.	Error relativo porcentual ϵ entre \bar{C} y \bar{C}' para las 3 constelaciones óptimas y $N_s = 464$ (línea punteada) $N_s = 1548$ (línea segmentada).	69
4.12.	Máximo throughput promedio para un canal con desvanecimientos lentos. Se comparan un canal Gaussiano (línea continua), un canal Rice con $K = 10$ (línea segmentada) un canal Rice con $K = 1$ (línea punteada) y un canal Rayleigh (línea segmentada y punteada).	70
4.13.	Comparación entre algoritmos de decodificación Log-MAP (líneas sólidas) y Max-Log-MAP (líneas punteadas y segmentadas) para un TC con distintas tasas de código, un largo de bloque $N_s = 1548$ y modulación 16-QAM.	71
4.14.	Throughput obtenido utilizando los TC para las tasas mostradas en a Tabla 6.1 del Anexo C para los tres esquemas de modulación óptimos (líneas segmentadas y punteadas) y un largo de bloque de $N_s = 1548$, comparado con la capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) y el máximo throughput (\tilde{C}) (líneas segmentadas).	73
4.15.	Throughput obtenido utilizando los TC para las tasas mostradas en a Tabla 6.1 del Anexo C para los tres esquemas de modulación óptimos (líneas segmentadas y punteadas) y un largo de bloque de $N_s = 464$, comparado con la capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) y el máximo throughput (\tilde{C}) (líneas punteadas).	74
6.1.	Constelación 4-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{2}$	82
6.2.	Constelación 8-PSK. $\Delta = 1$	83
6.3.	Constelación 8-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{5}$	83
6.4.	Constelación 16-PSK. $\Delta = 1$	84
6.5.	Constelación 16-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{10}$	84
6.6.	Constelación 32-PSK. $\Delta = 1$	85
6.7.	Constelación 32-QAM. $\Delta = \sqrt{5}/10$	85

Índice de figuras	7
6.8. Constelación 64-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{42}$	86

Índice de tablas

4.1.	Rango empírico de SNR encontrado para realizar las simulaciones en función del orden del esquema de modulación.	55
4.2.	Tabla resumen de los umbrales de cambio de modulación deducidos del análisis de capacidad (CM, BICM), del GB, y de las simulaciones de los TC para un largo de bloque $N_s = 1548$	73
4.3.	Tabla resumen de los umbrales de cambio de modulación deducidos del análisis de capacidad (CM, BICM), del GB, y de las simulaciones de los TC para un largo de bloque $N_s = 464$	74
6.1.	Resumen de patrones de perforado utilizados en las simulaciones.	88

Tabla de Acrónimos

Acrónimo	Significado en Inglés	Significado en Español
AMC	Adaptive Modulation and Coding	Modulación y Codificación Adaptativa
BER	Bit Error Rate	Tasa de Errores de Bit
BLER	Block Error Rate	Tasa de Errores de Bloque
LLR	Logarithmic Likelihood Ratio	Razón de Máxima Verosimilitud Logarítmicas
SNR	Signal to Noise Ratio	Relación Señal a Ruido
RSC	Recursive Systematic Convolutional	(código) Convolutacional Recursivo Sistemático
GB	Gallager Bound	Límite de Gallager
TC	Turbo Codes	Turbo Códigos
BICM	Bit Interleaved Coded Modulation	Modulación Codificada y Entrelazada a nivel de Bit
CM	Coded Modulation	Modulación Codificada
MAP	Maximum A Posteriori Probability	Algoritmo de decodificación que maximiza la probabilidad a posteriori
EDGE	Enhanced Data Rates for Global Evolution	Tasas de Transmisión Ampliadas para Evolución Global
UMTS	Universal Mobile Telecommunications System	Estándar de Sistemas de Comunicaciones de Tercera Generación
HSDPA	High Speed Downlink Packet Access	Estándar 3.5G, Versión 6 de UMTS
AWGN	Additive White Gaussian Noise	(canal) Aditivo Gaussiano Blanco

Capítulo 1

Introducción

La modulación y codificación adaptativa (AMC) consiste básicamente en modificar los parámetros de transmisión de acuerdo al estado del canal, el cual normalmente es medido en términos de la relación señal a ruido instantánea, de tal forma de maximizar la eficiencia espectral medida en [bit/s/Hz]. Esquemas tradicionales no adaptativos los cuales son diseñados para el peor caso o para el caso promedio, no permiten aprovechar al máximo la naturaleza variante en el tiempo del canal de comunicaciones. Cuando el canal presenta una relación a ruido alta existen recursos que no son aprovechados, mientras que para relaciones señal a ruido bajas, el diseño no permite una comunicación confiable. En contraste, el poder ajustar los parámetros de transmisión de acuerdo a la situación actual del canal, permite enviar mayor cantidad de información cuando el canal es favorable, mientras que para relaciones señal a ruido bajas se puede aumentar el nivel de protección con la que es enviada la información. De esta forma la modulación y codificación adaptativa aparece como una técnica eficaz que permite aumentar la tasa de transmisión de información a través de un canal variante en el tiempo como es el caso de un típico canal de comunicaciones inalámbrico.

Si bien las primeras ideas propuestas respecto a una transmisión adaptativa fueron hechas en los años 60 por J. Hayes [1], recién en la década de los 90, estas técnicas retomaron fuerza debido a los avances tecnológicos que permitían implementarla en sistemas de comunicaciones reales. Una muestra de lo anterior es la inclusión de estas técnicas adaptativas en los distintos estándares de comunicaciones actuales tales como “*Enhanced Data Rates for Global Evolution*” (EDGE) [2], “*High Speed Downlink Packet Access*” (HSDPA) del *Universal Mobile Telecommunications System* (UMTS) [3], y

los estándares inalámbricos de la IEEE: IEEE 802.11 e IEEE 802.16.

La modulación y codificación adaptativa ha sido extensamente estudiada en la literatura demostrándose los beneficios que el uso de estas técnicas adaptativas permiten lograr. En general, los trabajos existentes analizan la problemática de la modulación y codificación adaptativa considerando cumplir cierta restricción de tasa de error de bit (Bit Error Rate, BER) o tasa de error de bloque (Block Error Rate, BLER) y tratando el problema de seleccionar los parámetros de transmisión como un problema de maximización, generalmente medido en función del throughput. Distintos análisis pueden ser encontrados en [4]-[25].

En general, en un sistema que utiliza AMC es posible adaptar distintos parámetros [7] [12]: la potencia transmitida, el esquema de modulación, la tasa de código o el esquema de codificación, la tasa de símbolos, o una combinación de estos parámetros. Exceptuando casos aislados como los análisis presentados en [13] donde se analiza cómo variar en forma óptima la tasa de símbolos en un canal Rayleigh, o en [24] donde combinan una adaptación del esquema de modulación con la adaptación de la tasa de símbolos en un sistema TDMA/TDD, normalmente el análisis no considera adaptación en la tasa de símbolos debido a que es difícil de implementar en sistemas reales [12] además de aumentar el ancho de banda utilizado [13] [24], restringiendo así el análisis a la adaptación la potencia transmitida, el esquema de modulación y la tasa de código.

Si bien la adaptación de potencia, que consiste en ajustar la potencia transmitida para lograr una determinada relación señal a ruido, es analizada bajo distintos puntos de vista por ejemplo en [1], [4] y [25], a nivel de capacidad de canal, en [12] y [26] se muestra que variando la potencia transmitida y el esquema de modulación se logra un aumento de capacidad insignificante en comparación a sólo adaptar el esquema de modulación. Análogamente en [4] se muestra que adaptar la potencia sólo produce una mejora pequeña en el throughput. Por otro lado, en [16] se reporta que si bien durante un desvanecimiento se puede aumentar la potencia transmitida, esto aumentará las necesidades de potencia en el transmisor y la interferencia, esto último debido a que aumento en la potencia transmitida en un sistema con reutilización de frecuencias aumentará la interferencia co-canal.

Si se fija la atención entonces sobre la adaptación del esquema de modulación y la codificación solamente, se pueden separar los trabajos existentes en la literatura en dos grandes grupos: los que analizan un sistema adaptativo en el esquema de modulación y no en la codificación, como los presentados en

[7] [15]-[17] y [19] en los cuales se varía el esquema de modulación de acuerdo a la condición actual del canal, y los que analizan un sistema adaptativo tanto en esquema de modulación como en la codificación utilizada como los presentados en [4] [5] [7] [8] [10] [11] [14] [18] [20] [21], en los cuales junto a adaptar el esquema de modulación se selecciona la tasa de código óptima de acuerdo a la condición actual del canal. Se debe notar que lo anterior produce por una lado un aumento en la capacidad de corregir errores en la transmisión, pero por otro lado disminuye la eficiencia espectral debido al envío de información redundante.

Por otro lado, el Límite de Gallager (Gallager Bound, GB) presentado en [27, Ch. 3] permite acotar la probabilidad de error de bloque para un código cualquiera tomando en consideración el largo del bloque y la tasa de código utilizados. Una de las mayores ventajas de esta cota es que no depende de la técnica específica de codificación y no requiere información acerca de la estructura exacta del código, si no que depende de características básicas tales como el largo del bloque y la tasa de código [28].

Por último, las Razones de Máxima Verosimilitud Logarítmica (Logarithmic Likelihood Ratio, LLR) han sido utilizadas como las métricas asociadas a los bits que son pasadas al decodificador de tal forma de realizar una decodificación con entradas blandas (soft-input decoding) la cual será tratada con mayor detalle en la Sección 2.4. Sin embargo la caracterización estadística de estas métricas no ha sido extensamente estudiada en la literatura.

El trabajo a realizar se puede resumir como utilizar el GB para al obtención de límites de desempeño para sistemas que utilizan modulación y codificación adaptativa, para esquemas de modulación M -QAM y M -PSK, así como también determinar el ajuste de los parámetros en forma óptima para un sistema de este estilo. En forma paralela se estudiarán y simularán códigos potentes para contrastar el análisis teórico.

Más concretamente, este trabajo tiene como objetivos específicos:

- Determinar el esquema de modulación y tasa de código óptimos en un sistema que utiliza AMC sobre un canal Gaussiano casi estático en función de la SNR.
- Analizar el impacto al considerar un largo de bloque finito y al utilizar métricas calculadas en forma simplificada, y contrastar los resultados con los análisis de capacidad existentes en la literatura.

- Analizar la degradación en el desempeño del sistema al considerar un canal con desvanecimientos lentos.
- Comparar resultados al considerar un sistema en donde el largo de bloque de información es constante con un sistema en donde el largo del bloque de símbolos es constante.
- Contrastar resultados teóricos con simulación de códigos potentes con aplicaciones prácticas, específicamente con los TC.

Las contribuciones que realiza el trabajo se pueden resumir en:

- Utilizar el GB para encontrar los parámetros que optimizan el desempeño del sistema, así como cotas máxima de desempeño, resolviendo de esta forma el problema que se plantea.
- Utilizar las LLR dentro del GB como métricas que representan las probabilidades de transición de los bits a través del canal, ampliando de esta forma el uso del GB a constelaciones de orden superior.
- Evaluar la pérdida en el desempeño que se produce al considerar restricciones de tipo prácticas en el sistema tales como largo de bloque limitado y cálculo de métricas en forma simplificado.

Este documento está organizado como sigue: en el Capítulo 2 se presenta el marco teórico asociado al presente trabajo, el cual incluye el Modelo del Sistema (2.1), los análisis de la Capacidad del Canal (2.2), de la AMC (2.3), de las Métricas Logarítmicas de Máxima Verosimilitud (2.5), y de los Turbo Códigos (2.4), en el Capítulo 3 se presentan los detalles del problema que se desea atacar, en el Capítulo 4 se presentan los resultados numéricos obtenidos, y en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del presente trabajo.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica de los tópicos que se utilizarán como base para desarrollar el resto del presente trabajo de tesis. Para comenzar, se presenta el modelo del sistema que se desea analizar, a continuación se analizan las distintas formas de presentar la capacidad de canal, luego se revisan los antecedentes respecto a modulación y codificación adaptativa, a continuación se presentan los turbo códigos, luego se analizan las métricas de máxima verosimilitud logarítmica, para finalmente analizar el denominado “Límite de Gallager”.

2.1. Modelo del Sistema

En esta sección se presenta el modelo del sistema a analizar, se define la notación que será utilizada de aquí en adelante así como todas las suposiciones y simplificaciones realizadas en el análisis.

En la Figura 2.1 se muestra el diagrama de bloques del sistema a analizar. La cadena del transmisor está compuesta por un codificador (Codificador) de tasa R , un entrelazador (π) y un modulador ($\mu[\cdot]$), mientras que en el receptor la cadena está formada por un demodulador ($\mu^{-1}[\cdot]$), un desentrelazador (π^{-1}) y un decodificador (Decodificador).

El bloque de bits de información b de largo M es codificado con una tasa de código R , luego estos bits son entrelazados por π , obteniéndose el bloque de bits codificados y entrelazados x de largo N , los cuales serán pasados al modulador.

La tasa de código definida como $R = M/N$ se considerará un parámetro que se puede variar en forma continua aún cuando en la práctica sólo se

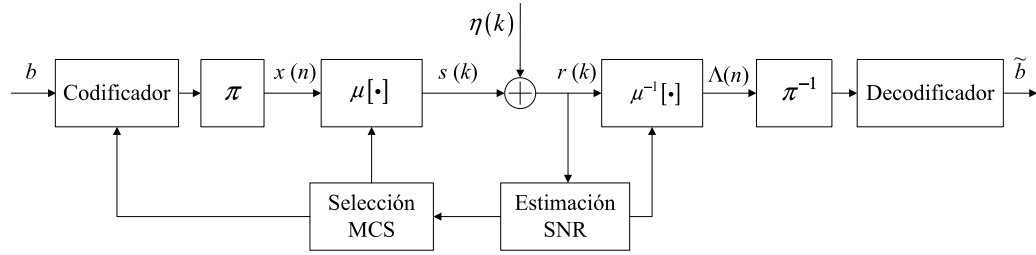


Figura 2.1. Diagrama de bloques del Sistema.

disponga de un grupo finito y normalmente reducido de tasas de código.

Los bits x son agrupados en símbolos que serán transmitidos a través del canal. Estos símbolos forman un vector de largo N_s , el cual es representado por $\mathbf{x}(k) = [x(mk), x(mk + 1), \dots, x(mk + m - 1)]$ donde m es el orden de la modulación en [bit/símbolo] y k representa el k -ésimo símbolo dentro del bloque. Cada grupo de m bits es mapeado mediante el mapper sin memoria $\mu[\cdot]$ a un símbolo de la constelación $s(k) \in \mathcal{X} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$ donde $M = 2^m$ es el número de símbolos en la constelación \mathcal{X} , es decir, $\mathbf{s}(\mathbf{k}) = \mu[\mathbf{x}(\mathbf{k})]$. El vector de símbolos recibido a la salida del canal se denota análogamente como $\mathbf{r}(k) = [r(mk), r(mk + 1), \dots, r(mk + m - 1)]$.

Las constelaciones consideradas en este trabajo son M -QAM con $M \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$ ó M -PSK con $M \in \{8, 16, 32\}$ las cuales utilizan un mapeo Gray o cuasi-Gray, tal como se muestra en el Anexo A. Todas estas constelaciones están normalizadas en potencia y poseen media nula, es decir:

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2 = 1 \quad (2.1)$$

Adicionalmente, se define \mathcal{X}_l^b como el conjunto de símbolos de la constelación \mathcal{X} que poseen en la posición $l = \{1, 2, \dots, m\}$ un valor $b = \{0, 1\}$ siendo $l = 1$ y $l = m$ el bit menos significativo y más significativo respectivamente. Se define además $x_l(k)$ como el l -ésimo bit dentro del k -ésimo símbolo transmitido $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k)]$.

En este trabajo se suponen bits codificados equiprobables, lo cual da como consecuencia que los símbolos transmitidos a través del canal también son equiprobables.

$$P[x = 1] = P[x = 0] = \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

$$P[s(k) = \alpha_i] = \frac{1}{2^m} \quad (2.3)$$

con $i = 1, 2, \dots, 2^m$ y donde $P[\cdot]$ denota probabilidad.

El canal de comunicaciones es modelado como un canal con ruido aditivo Gaussiano blanco (Additive White Gaussian Noise, AWGN). De esta manera, el modelo de señal en banda base discreta para la señal recibida $r(k)$ se expresa como:

$$r(k) = s(k) + \eta(k) \quad (2.4)$$

donde $s(k)$ es la señal transmitida y $\eta(k)$ es el ruido Gaussiano bidimensional asociado al canal, el que se supone de media nula y varianza total $N_0 = \sigma^2$ ($N_0/2$ en cada componente real e imaginaria), donde N_0 corresponde a la densidad espectral de potencia.

La función densidad de probabilidad asociada al ruido complejo está dada por:

$$p_\eta(\eta) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{|\eta|^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.5)$$

Con las anteriores definiciones, se puede expresar la relación señal a ruido (Signal to Noise Ratio, SNR) Γ como¹:

$$\Gamma = \frac{1}{\sigma^2} \quad (2.6)$$

Se destaca la suposición que el canal es casi estático, es decir, el valor de Γ varía en forma lenta en comparación con el tiempo de transmisión de un bloque de símbolos, pudiendo suponer así que la SNR se mantiene constante durante la transmisión de un bloque.

La señal recibida $r(k)$ es demodulada por $\mu^{-1}[\cdot]$, el cual calcula las métricas blandas para cada bit codificado en forma de las Razones de Máxima Verosimilitud Logarítmica (Logarithmic Likelihood Ratio, LLR) como:

$$\Lambda_l(r(k)) = \ln\left(\frac{P[x_l(k) = 1|r(k)]}{P[x_l(k) = 0|r(k)]}\right) \quad (2.7)$$

Estas métricas son analizadas con mayor detalle en la Sección 2.5.

El vector de métricas es desentrelazado por π^{-1} y pasado al decodificador el cual procesa las métricas para finalmente entregar una estimación del vector de bits transmitidos \tilde{b} .

¹De aquí en adelante se utilizarán indistinguiblemente los términos SNR y Γ para representar la relación señal a ruido promedio

El sistema considerado utiliza modulación y codificación adaptativa (Adaptive Modulation and Coding, AMC) pudiendo ajustar de bloque a bloque, el esquema de modulación, así como también la tasa de código utilizada en la codificación.

Para poder lograr la adaptación de la tasa de código y/o esquema de modulación es necesario determinar la calidad del canal la cual se medirá en función de la SNR. El análisis supone que el bloque de estimación de la Figura 2.1 mide la SNR y la informa al transmisor de manera instantánea, precisa, y libre de errores. El bloque de selección del Conjunto de Modulación y Codificación (Modulation and Coding Set, MCS) decide en base a la información recibida cuál será la tasa de código y esquema de modulación de la próxima transmisión.

La medida de desempeño del sistema será el throughput normalizado al ancho de banda, medido en $[\text{bit/s/Hz}]^2$, y que se puede expresar como:

$$\theta(P_B, \mathcal{X}, R) = (1 - P_B) \cdot \log_2(M) \cdot R \quad (2.8)$$

donde P_B es la probabilidad de error de bloque que es afectada por \mathcal{X} , por la tasa de código R , y por el largo del bloque N_s .

Se decide utilizar el throughput dado por la ecuación (2.8) como parámetro de desempeño del sistema ya que esta métrica entrega una medida de cuán eficiente es el sistema en términos de transmisión de información, tomando en consideración la tasa de código utilizada, el esquema de modulación, y la probabilidad de error de bloque.

2.2. Capacidad de Canal

La capacidad de canal, inicialmente propuesta por Claude Shannon en 1948 [29], es una medida de la máxima cantidad de información libre de errores que puede ser transmitida a través de un canal de comunicaciones. A pesar de la existencia de este límite fundamental, existen distintas formas de presentar la capacidad de canal sujeta a restricciones de diseño del sistema de comunicaciones. En las siguientes secciones se analizan estas distintas formas de presentar la capacidad de canal para un canal AWGN.

²Durante todo este documento, y debido a que el sistema analizado corresponde a un sistema de transmisión codificada, el throughput se medirá en $[\text{bit/s/Hz}]$ donde $[\text{bit}]$ se refiere a bits de información a la entrada del codificador.

2.2.1. Límite de Shannon

El límite de Shannon establece que es posible obtener una capacidad máxima de transmisión de información, o eficiencia espectral normalizada, a una tasa de error arbitrariamente baja, mediante la utilización de algún código corrector de errores. Esta tasa máxima, conocida como Capacidad de Canal, se expresa en función de la relación señal a ruido y el ancho de banda utilizado en la transmisión de acuerdo a la bien conocida expresión de capacidad de Shannon para un canal AWGN [30]:

$$C_S = W \cdot \log_2(1 + \Gamma) \text{ [bit/s]} \quad (2.9)$$

donde Γ es la relación señal a ruido y W es el ancho de banda utilizado en la transmisión.

Reescribiendo (2.9) se obtiene la capacidad de canal normalizada al ancho de banda:

$$C = \frac{C_S}{W} = \log_2(1 + \Gamma) \text{ [bit/s/Hz]} \quad (2.10)$$

Esta relación, acota la cantidad de información que se puede transmitir a través del canal en forma confiable para una determinada relación a ruido dada cierta restricción de potencia transmitida. Debido a que Shannon no explica cuál es la forma de alcanzar este límite fundamental, durante muchos años se ha intentado diseñar esquemas de codificación que permitan aproximarse a este límite.

Se debe notar que la relación dada por (2.10) corresponde a una cota máxima para el desempeño de un sistema de comunicaciones y por ende nunca podrá ser superada. Además se destaca que esta relación se obtiene maximizando la información mutua entre la entrada y salida del canal, para todas las distribuciones de la señal de entrada que satisfacen la restricción de potencia, lo cual se logra cuando la señal enviada se distribuye en forma Gaussiana [30].

2.2.2. Capacidad de Modulación Codificada

Si se restringe el canal a ser un canal sin memoria³, con entradas discretas, y salidas continuas en donde $\alpha \in \mathcal{X}$ son los M posibles símbolos a transmitir los cuales son elegidos con una distribución de probabilidad $q(\alpha)$, y r es la salida continua del canal, se define la información mutua⁴ entre α y r como:

$$I(\alpha; r) = \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{p(r)} \right) \quad (2.11)$$

donde $p(r|\alpha)$ corresponde a la función de densidad probabilidad condicional de r dado α .

La capacidad de canal en forma general se define como la maximización de la información mutua promedio entre las entrada y salida del canal sobre de la distribución de probabilidad de los símbolos $q(\alpha)$ [27]:

$$\tilde{C} \equiv \max_{q(\alpha)} \{ \bar{I}(\alpha; r) \} \quad (2.12)$$

$$= \max_{q(\alpha)} \{ E_{\alpha, r} [I(\alpha; r)] \} \quad (2.13)$$

$$= \max_{q(\alpha)} \left\{ E_{\alpha, r} \left[\log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{p(r)} \right) \right] \right\} \quad (2.14)$$

$$= \max_{q(\alpha)} \left\{ \sum_{\forall \alpha} q(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{p(r)} \right) dr \right\} \quad (2.15)$$

donde $E_{\alpha, r}[\cdot]$ es el operador esperanza bidimensional sobre α y r .

Desarrollando la expresión dada por la ecuación (2.15), y considerando los M símbolos equiprobables obviando de esta forma la maximización respecto a la distribución de $q(\alpha)$, se tiene que:

³Un canal sin memoria (memoryless channel) se define como un canal en que cada símbolo transmitido a través de éste es afectado de forma independientes. Sea $\bar{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I]$ el vector de símbolos transmitidos a través del canal, y $\bar{r} = [r_1, r_2, \dots, r_I]$ los símbolos recibidos [27]. El canal será un canal sin memoria sí:

$$p(\bar{r}|\bar{\alpha}) = \prod_{i=1}^I p(r_i|\alpha_i)$$

Se destaca que un canal AWGN como el tratado en este trabajo cae dentro de este tipo de canales.

⁴Debido a que tanto la entrada como la salida al canal corresponden a variables aleatorias, es posible definir la información mutua entre ellas la cual es una medida de cuan dependientes estas variables aleatorias son entre sí.

$$\tilde{C} = \sum_{\forall \alpha} q(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{p(r)} \right) dr \quad (2.16)$$

$$= \sum_{\forall \alpha} \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha') q(\alpha')} \right) dr \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{\frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')} \right) dr \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')} \right) dr - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{1}{M} \right) dr \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{M} \left[\sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')} \right) dr + M \log_2(M) \right] \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')} \right) dr + \log_2(M) \quad (2.21)$$

$$= \sum_{\forall \alpha} \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')} \right) dr + \log_2(M) \quad (2.22)$$

$$= E_{\alpha,r} \left[\log_2 \left(\frac{p(r|\alpha)}{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')} \right) \right] + \log_2(M) \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) corresponde a la denominada por Caire *et al* en [31] como “Capacidad de Modulación Codificada” (Coded Modulation Capacity, CM) o también conocida como “Capacidad Restringida” (Constrained Capacity) y corresponde al límite de capacidad que considera el uso de un número discreto de señales o símbolos en la constelación, y una salida continua del canal de tal forma de realizar una decodificación blanda.

Finalmente, se presenta el desarrollo que permite expresar (2.23) tal como fue presentada originalmente en 1982 por Ungerboeck en [32]:

$$\tilde{C} = \log_2(M) - \sum_{\forall \alpha} \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')}{p(r|\alpha)} \right) \right\} dr \quad (2.24)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{\sum_{\forall \alpha'} p(r|\alpha')}{p(r|\alpha)} \right) \right\} dr \quad (2.25)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{\frac{1}{\pi\sigma^2} \sum_{\forall \alpha'} \exp\left(-\frac{|r-\alpha'|^2}{\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|r-\alpha|^2}{\sigma^2}\right)} \right) \right\} dr \quad (2.26)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{\sum_{\forall \alpha'} \exp\left(-\frac{|r-\alpha'|^2}{\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{|r-\alpha|^2}{\sigma^2}\right)} \right) \right\} dr \quad (2.27)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(r|\alpha) \log_2 \left(\frac{\sum_{\forall \alpha'} \exp\left(-\frac{|\alpha+\eta-\alpha'|^2}{\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{\sigma^2}\right)} \right) \right\} d\eta \quad (2.28)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(r|\alpha) \log_2 \left(\sum_{\forall \alpha'} \exp \left(-\frac{|\alpha + \eta - \alpha'|^2 - |\eta|^2}{\sigma^2} \right) \right) \right\} d\eta \quad (2.29)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \mathbb{E}_{\eta} \left[\log_2 \left(\sum_{\forall \alpha'} \exp \left(-\frac{|\alpha + \eta - \alpha'|^2 - |\eta|^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] \quad (2.30)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{\ln(2)} \cdot \mathbb{E}_{\eta} \left[\frac{|\eta|^2}{\sigma^2} \right] - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \mathbb{E}_{\eta} \left[\log_2 \left(\sum_{\forall \alpha'} \exp \left(-\frac{|\alpha + \eta - \alpha'|^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] \quad (2.31)$$

$$= \log_2(M) - \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{M} \sum_{\forall \alpha} \mathbb{E}_{\eta} \left[\log_2 \left(\sum_{\forall \alpha'} \exp \left(-\frac{|\alpha + \eta - \alpha'|^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] \quad (2.32)$$

En la Figura 2.2 se presenta la capacidad CM (\tilde{C}) para un canal AWGN al evaluar numéricamente la ecuación (2.23) para los distintos esquemas de modulación considerados en este trabajo. Se destaca que desde acá en adelante, se utilizará el término “Throughput Máximo” para referirse tanto al throughput calculado en base a la ecuación (2.8) como a la capacidad del canal. Lo anterior es posible debido a que la capacidad de canal corresponde al throughput máximo cuando la BLER tiende a 0 (o equivalentemente cuando la BER tiende a 0).

2.2.3. Capacidad BICM

En [31] Caire *et al* presentan un análisis de capacidad para un sistema denominado Modulación Codificada y Entrelazada a nivel de Bit (Bit Interleaved Coded Modulation, BICM), el cual consiste básicamente en un sistema similar al mostrado en la Figura 2.1 y que consta de un codificador, un entrelazador, un modulador, un canal de comunicaciones, un demodulador que calcula las métricas blandas, un desentrelazador y un decodificador. La diferencia fundamental entre el enfoque de Ungerboeck presentado en la sección anterior y el de la presente sección, radica en que para BICM existe una separación del codificador y del modulador en entidades que pueden ajustar sus parámetros en forma independiente, además del procesamiento a nivel de bit en la recepción.

El modelo equivalente de canal utilizado en [31] es el mostrado en la Fi-

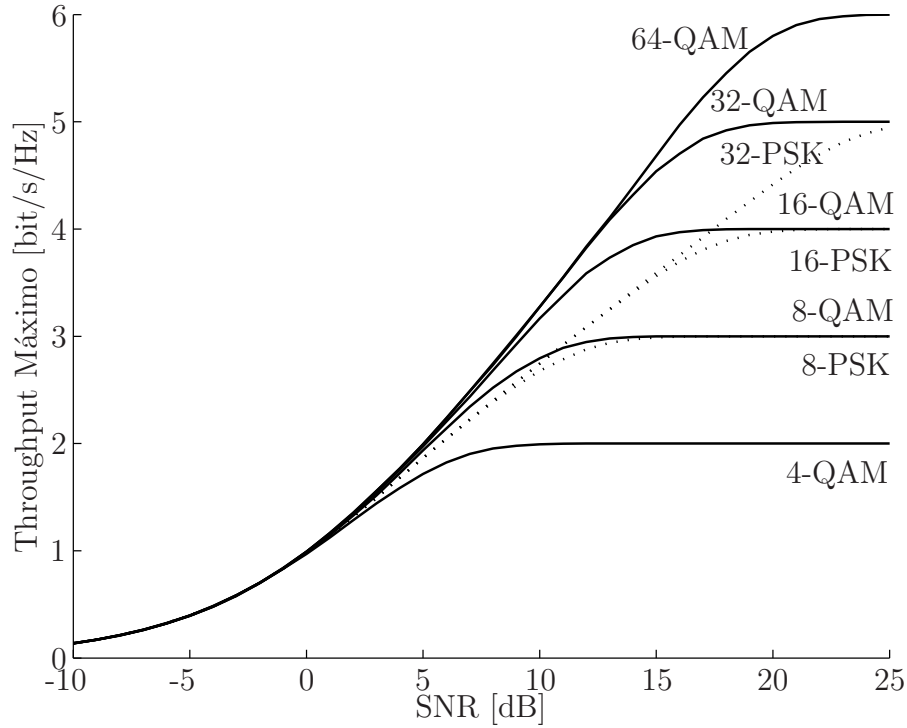


Figura 2.2. Capacidad CM (\tilde{C}) versus Γ para diferentes esquemas de modulación para un canal AWGN. M -QAM (líneas sólidas) con $M \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$ ó M -PSK (líneas punteadas) con $M \in \{8, 16, 32\}$.

gura 2.3, el cual consiste de m canales paralelos conectados por un switch aleatorio al codificador, lo cual modela un entrelazado ideal. Cada canal en paralelo es un canal con entrada binaria, sin memoria, e independiente de los otros $(m - 1)$ canales, y está asociado a cada posición del bit dentro de símbolo. En la recepción, donde se conoce el orden utilizado por el switch aleatorio, se calculan las métricas asociadas al bit y se entregan al decodificador.

Se define b como una entrada binaria a la salida del Codificador, r como la observación a la salida del canal, y S como la variable aleatoria que representa el switch, la cual es independiente e idénticamente distribuida de manera uniforme sobre $i = 1, 2, \dots, m$. Con esto, la información mutua condicional

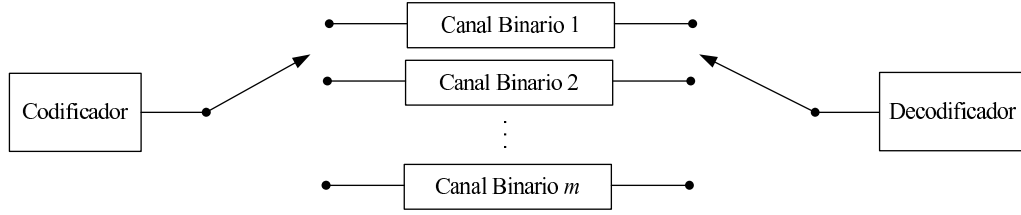


Figura 2.3. Modelo equivalente de canal para el sistema BICM.

entre b y r está dada por:

$$I(b; r|S = i) = 1 - E_{b,r} \left[\log_2 \frac{\sum_{\alpha' \in \mathcal{X}} p(r|\alpha')}{\sum_{\alpha \in \mathcal{X}_b^i} p(r|\alpha)} \right] \quad (2.33)$$

Luego, la información mutua promedio condicional es obtenida promediando la ecuación (2.33) respecto a S , obteniéndose:

$$I(b; r|S) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I(b; r|S = i) \quad (2.34)$$

Finalmente, considerando entradas equiprobables, y debido a que existen m canales paralelos, la capacidad BICM será m veces la capacidad de cada canal paralelo:

$$\hat{C} = m \cdot I(b; r|S) \quad (2.35)$$

$$= m - \sum_{i=1}^m E_{b,y} \left[\log_2 \frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{X}} p(y|\alpha)}{\sum_{\alpha' \in \mathcal{X}_b^i} p(r|\alpha')} \right] \quad (2.36)$$

En general, la expresión 2.36 no puede ser calculada en forma analítica por lo que se debe evaluar numéricamente mediante simulación Monte Carlo.

En la Figura 2.4 se muestra el resultado de evaluar (2.4) sobre un canal AWGN para las distintas constelaciones consideradas en este trabajo, extendiendo los resultados presentados en [31] donde se muestra la capacidad de canal sólo para 4-PSK, 8-PSK y 16-QAM.

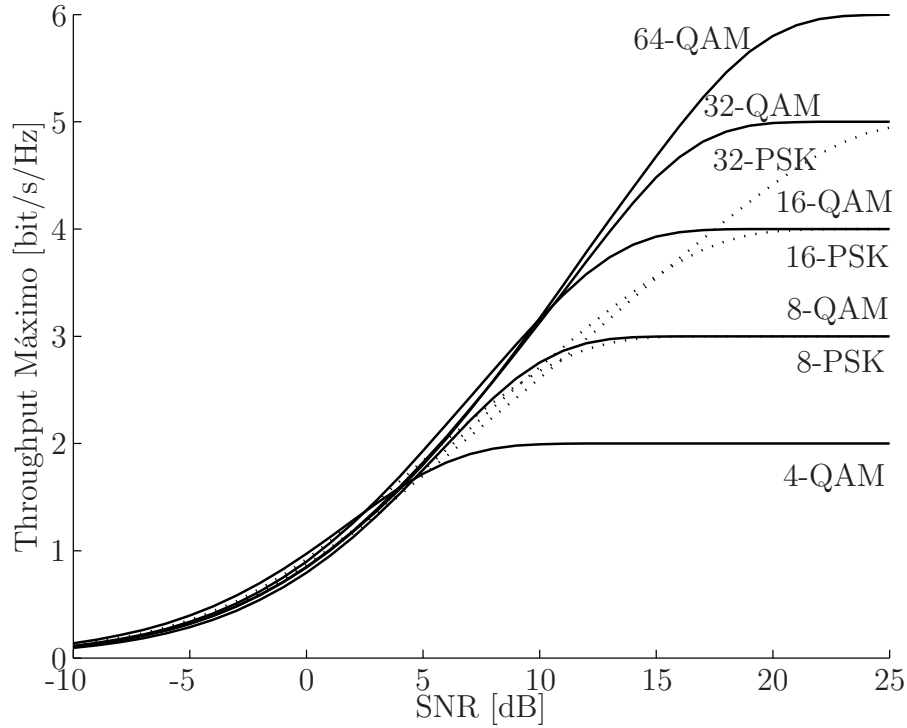


Figura 2.4. Capacidad BICM (\hat{C}) versus Γ para diferentes esquemas de modulación para un canal AWGN. M -QAM (líneas sólidas) con $M \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$ ó M -PSK (líneas punteadas) con $M \in \{8, 16, 32\}$.

Finalmente, invocando el teorema del procesamiento de la información (data processing theorem) [30], y debido a que r es estadísticamente independiente de b dado cierto valor de α , en [31] se demuestra que:

$$\hat{C} \leq \tilde{C} \quad (2.37)$$

De esta forma, se prueba que el desempeño de un esquema BICM es sub-óptimo respecto a la capacidad presentada en la Sección 2.2.2.

2.3. Modulación y Codificación Adaptativa

La modulación y codificación adaptativa (Adaptive Modulation and Coding, AMC) consiste básicamente en cambiar los parámetros de trans-

misión de acuerdo al estado del canal, el cual normalmente es medido en términos de la relación señal a ruido, de tal forma de maximizar la eficiencia espectral medida en [bit/s/Hz]. Esquemas tradicionales no adaptativos los cuales son diseñados para el peor caso o para el caso promedio, no permiten aprovechar al máximo la naturaleza variante en el tiempo del canal de comunicaciones. Cuando el canal presenta una SNR alta existen recursos que no son aprovechados, mientras que para SNR bajas, el diseño no permite una comunicación confiable. En contraste, el poder ajustar los parámetros de transmisión de acuerdo a la situación actual del canal, permite enviar mayor cantidad de información cuando el canal es favorable, mientras que para SNR bajas se puede aumentar el nivel de protección con la que es enviada la información. De esta forma la AMC aparece como una técnica promisoriosa que permite aumentar la tasa de transmisión de información a través de un canal variante en el tiempo como es el caso de un típico canal de comunicaciones inalámbrico.

Si bien las primeras ideas propuestas respecto a una transmisión adaptativa fueron hechas en los años 60 por J. Hayes en [1], recién en la década de los 90, estas técnicas retomaron fuerza debido a los avances tecnológicos que permitían implementarla en sistemas de comunicaciones reales. Una muestra de lo anterior es la inclusión de estas técnicas adaptativas en los distintos estándares de comunicaciones actuales tales como “*Enhanced Data Rates for Global Evolution*” (EDGE) [2], “*High Speed Downlink Packet Access*” (HSDPA) del *Universal Mobile Telecommunications System* (UMTS) [3], y los estándares inalámbricos de la IEEE: IEEE 802.11 e IEEE 802.16.

La modulación y codificación adaptativa ha sido extensamente estudiada en la literatura demostrándose los beneficios que el uso de estas técnicas adaptativas permiten lograr. En general, los trabajos existentes analizan la problemática de la modulación y codificación adaptativa considerando cumplir cierta restricción en la tasa de error de bit (Bit Error Rate, BER) o la tasa de error de bloque (Block Error Rate, BLER) y tratando el problema de seleccionar los parámetros de transmisión como un problema de maximización, generalmente en función del throughput. Distintos análisis pueden ser encontrados en [1], [4]-[25].

En general, en un sistema que utiliza AMC es posible adaptar distintos parámetros [7] [12]: la potencia transmitida, el esquema de modulación, la tasa de código o el esquema de codificación, la tasa de símbolos, o una combinación de estos parámetros. Exceptuando casos aislados como los análisis presentados en [13] donde se analiza cómo variar en forma óptima la tasa de

símbolos en un canal Rayleigh, o en [24] donde se combina una adaptación del esquema de modulación con la adaptación de la tasa de símbolos en un sistema TDMA/TDD, normalmente los análisis no consideran adaptación en la tasa de símbolos debido a que es difícil de implementar en sistemas reales [12] además de aumentar el ancho de banda utilizado [13] [24], restringiendo así el análisis a la adaptación la potencia transmitida, el esquema de modulación y la tasa de código.

Si bien la adaptación de potencia, que consiste en ajustar la potencia transmitida para lograr una determinada relación señal a ruido, es analizada bajo distintos puntos de vista por ejemplo en [1], [4] y [25], a nivel de capacidad de canal, en [12] y [26] se muestra que variando la potencia transmitida y el esquema de modulación se logra un aumento de capacidad insignificante en comparación a sólo adaptar el esquema de modulación. Análogamente en [4] se muestra que adaptar la potencia sólo produce una mejora pequeña en el throughput. Por otro lado, en [16] se reporta que si bien durante un desvanecimiento se puede aumentar la potencia transmitida, esto aumentará las necesidades de potencia en el transmisor y la interferencia producida.

Si se fija la atención entonces sobre la adaptación del esquema de modulación y la codificación, se pueden separar los trabajos existentes en la literatura en dos grandes grupos: los que analizan un sistema adaptativo en el esquema de modulación y no en la codificación, como los presentados en [7], [15]-[17] y [19] los que se varía el esquema de modulación de acuerdo a la condición actual del canal, y los que analizan un sistema adaptativo tanto en esquema de modulación como en la codificación utilizada como los presentados en [4] [5] [6] [8] [10] [11] [14] [18] [20] [21], en los cuales junto a adaptar el esquema de modulación se selecciona la tasa de código óptima de acuerdo a la condición actual del canal. Se debe destacar que lo anterior produce por una lado un aumento en la capacidad de corregir errores en la transmisión, pero por otro lado una disminución la eficiencia espectral debido al envío de información redundante.

Específicamente en [7] se analizan, desde un punto de vista práctico, la modulación y codificación adaptativa sobre canales con desvanecimiento, centrandó su atención en el control de potencia y el esquema de modulación en forma simultánea para esquemas de modulación M -QAM. El aporte de este trabajo es que se optimizan simultáneamente el esquema de modulación y la potencia de transmisión para maximizar la eficiencia espectral, al tiempo que satisfacen restricciones de potencia y BER. Este trabajo es inspirado en los

resultados de capacidad presentados en [26] en donde calcula la capacidad de canal de Shannon para canales con desvanecimiento al tener conocimiento perfecto de la ganancia en potencia del canal al utilizar técnicas de transmisión adaptativas. En este trabajo también se encuentra una expresión para la adaptación óptima de potencia transmitida.

Para el caso codificado, en [14] se modela el canal variante en el tiempo como M modelos de canal estacionarios que forman un modelo markoviano de estados finitos, y se enfocan en códigos convolucionales perforados de tal forma de no modificar la base del codificador y decodificador. Adicionalmente se analiza un algoritmo adaptativo que combina la adaptación de la tasa de código con un sistema de retransmisión H-ARQ (Hybrid Automatic Repeat Request). Por otro lado en [18] también es considerado el combinar técnicas adaptativas con esquemas de retransmisión.

A pesar de lo prometedoras que parecen las técnicas adaptativas anteriormente expuestas, existen una serie de inconvenientes que limitan su funcionamiento en sistemas reales. Dentro de los inconvenientes más importantes se encuentran [7]:

- Velocidad y precisión en la estimación del canal. Si el canal varía muy rápido, la estimación no será buena, y por ende, el desempeño se degradará. En [7] se sugiere que la estimación se puede mejorar usando “técnicas de estimación de símbolo asistidas por tono piloto” (pilot-symbol-assisted estimation technique). Análisis de los efectos en la estimación del canal pueden ser encontrados en [5] [7].
- Tiempo de coherencia del canal. El canal debe permanecer constante durante la transmisión de al menos un centenar de símbolos. En caso de que esta restricción no se cumpla, no es posible lograr mejoras al utilizar esquemas adaptativos.
- Restricciones de hardware y consideraciones de “formación del pulso” (pulse-shaping). Estas restricciones determinan cuan rápido se puede cambiar el esquema de modulación o potencia de transmisión.
- Interferencia. Aún cuando la modulación adaptativa aumenta la eficiencia espectral, estas técnicas también pueden aumentar tanto la interferencia co-canal en sistemas con reutilización de frecuencias, como también la interferencia de canal adyacente.

Si bien las limitaciones presentadas anteriormente son de vital importancia para la implementación práctica de un sistema que utilice AMC, el análisis de éstas limitaciones está fuera del objetivo del presente trabajo.

2.4. Turbo Códigos

Desde la aparición de los Turbo Códigos (Turbo Codes, TC) en 1993 cuando Berrou *et al.* presentaron su trabajo [33], éstos han sido centro de atención en el área de codificación debido a que mostraron desempeños que se acercaban a la capacidad de Shannon como nunca antes lo había hecho otro código. En [34] se mostró que utilizando un turbo código con tasa de código 1/2 y modulación BPSK para obtener un BER de 10^{-5} sólo se necesitaba una relación señal a ruido $E_b/N_0 = 0,7$ dB siendo $E_b/N_0 = 0$ el límite teórico según la Capacidad de Shannon. Se destaca que aún cuando la comparación es pesimista en el sentido de que al utilizar una modulación BPSK ya se está limitando el máximo desempeño posible, estos códigos lograron acercarse a 0.7 dB del límite teórico máximo, algo que históricamente nunca se había logrado. En [35] es posible encontrar un análisis de desempeño de distintos TC en donde se comparan con diferentes cotas de error teóricas. Probablemente en la actualidad los TC son los códigos potentes (strong codes) más populares con aplicaciones prácticas: Estándar de Sistemas de Comunicaciones de Tercera generación (3G), comunicaciones espaciales (deep-space communications), transmisión de video digital (Digital Video Broadcasting, DVB), etc.

En la siguientes secciones se presentan los conceptos de concatenación de códigos y decodificación iterativa los cuales forman la base de los TC, también se describen el codificador y decodificador turbo, así como detalles respecto al diseño de estos códigos.

2.4.1. Estructura básica

En su forma básica, un turbo código no es más que la unión de dos viejos conceptos: la concatenación de códigos y la decodificación iterativa [36].

La concatenación de códigos ha sido durante muchos años una forma de lograr códigos potentes basándose en dos o más códigos simples. Por ejemplo, el caso más simple es la concatenación de dos códigos en forma serial, los cuales son denominados código exterior e interior (outer code e inner code) respectivamente en donde la decodificación primero es realiza por un deco-

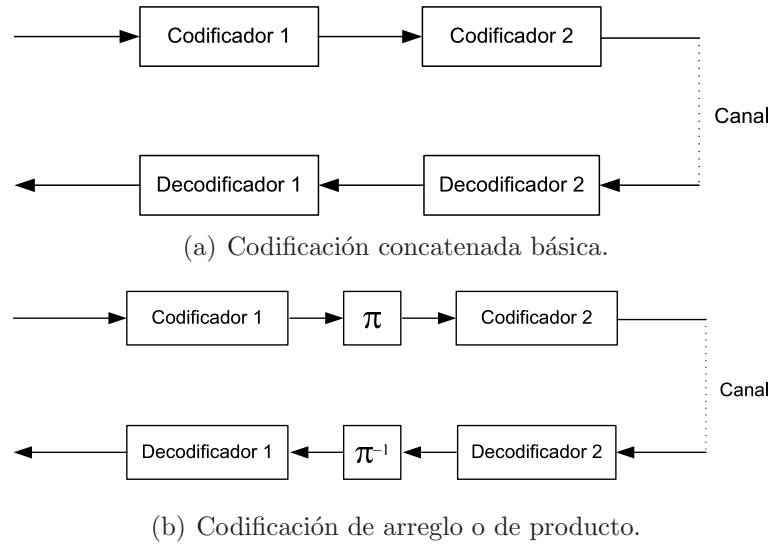


Figura 2.5. Comparación esquemas de codificación concatenada.

dificador asociado al codificador interno, para luego pasar esta información al decodificador asociado al codificador externo. Esta estructura es mostrada en la Figura 2.5(a). Sin embargo, estos códigos concatenados poseen varias desventajas dentro de las que se destacan que el segundo decodificador recibe sólo decisiones duras y por ende no pueden realizar una decodificación blanda. Así la decodificación del bloque completo no puede ser hecha como una decodificación de máxima verosimilitud (Maximum Likelihood, ML). La otra desventaja es que los errores en la decodificación del código interno aumentan los errores en ráfaga que normalmente no pueden ser corregidos por el decodificador externo [36].

Para solucionar el último problema expuesto anteriormente es posible utilizar una clase de códigos concatenados denominados códigos de arreglo o códigos de producto, los cuales difieren de los más simples en que se agrega un entrelazador de bloque entre los dos codificadores y obviamente un desenrelazador en la decodificación. En la Figura 2.5 se muestra la comparación de esquemas de codificación concatenada usando dos codificadores.

Si bien la decodificación se realiza primero con el Decodificador 2 y luego con el Decodificador 1, es posible realizar el proceso en forma inversa, es decir, primero decodificar el código externo y luego el código interno. Es simple mostrar que de acuerdo al patrón de errores recibido, los esquema se

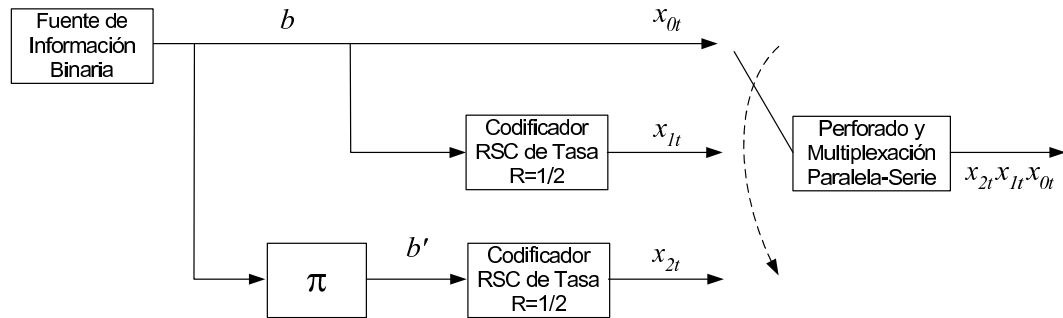


Figura 2.6. Esquema simplificado del turbo codificador utilizado.

comportan de forma diferente. Debido a lo anterior, se concluye que sería útil el poder utilizar decisiones blandas que reflejen la confiabilidad de las decisiones tomadas por el decodificador, y adicionalmente sería útil también que los decodificadores pudieran intercambiar la información blanda de tal forma de que se produzca un proceso que se repita hasta lograr una mejor estimación de los bits codificados. Lo anterior es lo que se denomina decodificación iterativa (iterative decoding) la que junto a la concatenación de los codificadores es la base sobre la que operan los TC.

2.4.2. Turbo codificador

Un turbo codificador consiste en la concatenación paralela o serie de dos o más códigos convolucionales recursivos y sistemáticos (Recursive Systematic Convolutional Codes, RSC) conectados por medio de un interleaver tal como se muestra en la Figura 2.6.

Si bien la concatenación puede ser paralela o serial, el turbo codificador utilizado en esta sección del trabajo es inspirado en el esquema considerado en el estándar de sistemas de comunicaciones móviles de tercera generación (3G) [3] y por ende se analizará el caso de concatenación paralela. Este codificador consta de dos RSC idénticos de tasa $1/2$, los cuales agregan al bit sistemático (bit de información) un bit de paridad, lográndose así una tasa base para el codificador turbo de $1/3$.

En la Figura 2.6 se muestra la secuencia de entrada de bits b al codificador superior, la entrada después del entrelazado b' al codificador inferior, la salida de los bits sistemáticos x_{0t} , y la salida de los bits de paridad x_{1t} y x_{2t} para el

primer y segundo codificador respectivamente, donde el subíndice t representa el índice temporal en la salida de los bits codificados. Estos bits son enviados al bloque de perforación y multiplexación paralela serial de tal forma de generar el vector de bits codificados que es pasado al siguiente bloque de la cadena de transmisión.

Dentro de los parámetros que se puede ajustar en el diseño del código turbo está la elección de los codificadores constituyentes los cuales quedan completamente definidos por sus polinomios generadores g_1 y g_2 . La notación generalmente usada para un RSC es $G = [1, g_2/g_1]$ donde g_1 representa la realimentación de la salida hacia la entrada y g_2 representa la salida del bit de paridad. Normalmente estos polinomios son representados en forma octal [37].

Para el análisis presentado en este trabajo se consideran el par de polinomios generadores $(g_1, g_2) = (15, 11)_8$, es decir, $G = [1, 11/15]_8$, basándose en los resultados presentados en [38] donde se encuentran, por medio de simulación computacional, polinomios generadores óptimos para códigos de tasa alta mediante perforación de un TC formado por la concatenación paralela de dos RSC de tasa 1/2, idéntico al caso considerado en este trabajo. En este documento se consideran turbo codificadores con tamaño de memoria 3 y 4 (8 y 16 etapas del diagrama de trellis). Para el caso de un tamaño de memoria de 3, se compara el desempeño de 6 distintos códigos RSC formados por polinomios de realimentación pertenecientes a $g_1 \in \{15, 13\}$, y por polinomios para la salida del codificador pertenecientes a $g_2 \in \{11, 13, 15, 17\}$. Debido a que [38] muestra que los polinomios generadores $(g_1, g_2) = (15, 11)_8$ son óptimos en el sentido de cumplir un determinado objetivo de BER, se escoge el uso de estos polinomios en el diseño presentado en este trabajo. El esquema del codificador resultante es el mostrado en la Figura 2.7.

Por otra parte, el bloque de entrelazado (π) en el codificador turbo es un bloque que provee aleatoriedad y que también incrementa el peso de las palabras de código que salen del codificador lo cual se traduce en una mayor distancia libre del código y por ende en un mejor desempeño en la decodificación [37]. Debido a que está fuera de los objetivos de este trabajo el evaluar el desempeño de los diferentes tipos de entrelazadores, se considera un entrelazador aleatorio que simplemente permuta aleatoriamente los bits dentro del bloque.

Para satisfacer la necesidad de utilizar códigos turbo de tasa mayor principalmente existen dos técnicas: realizar un proceso de perforado de los bits, ó bien utilizar códigos constituyentes de tasa más alta. Dado que para

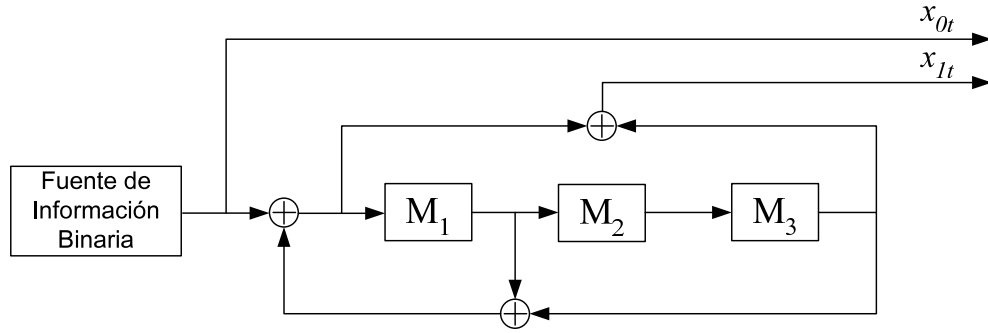


Figura 2.7. Esquema del codificador con polinomios generadores $G = [1, 11/15]_8$ con tamaño de memoria 3.

efectos prácticos no es deseable cambiar entre diferentes pares Codificador-Decodificador cuando se desea cambiar la tasa de código de la transmisión, la técnica de perforado surge como una solución que permite evitar este cambio a expensas de sólo informar al receptor sobre el patrón de perforado que se está utilizando. En primera instancia, el perforado que consiste simplemente en no transmitir determinados bits, puede aplicarse tanto a los bits sistemáticos como a los de paridad. Sin embargo, y debido a que se muestra en [38] que el perforado de bits sistemáticos reduce el desempeño para decodificadores iterativos de probabilidad a posteriori (MAP decoders), sólo se perforarán los bits de paridad. Esto concuerda con lo propuesto por el standard 3G así como con [39] donde se señala que en la literatura se ha mostrado que la perforación de bits sistemáticos puede tener drásticos efectos en el desempeño del código.

En general, el patrón de perforado se basa en una “matriz de perforado” \mathbf{P} de período P (número de columnas) y de J filas donde cada fila está asociada a la j -ésima salida del codificador. Para el caso analizado, la primera fila está asociada a los bits sistemáticos, la segunda a la salida del primer codificador, y la tercera a la salida del segundo codificador.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1p} \\ \cdots & g_{jp} & \cdots \\ g_{J1} & \cdots & g_{JP} \end{bmatrix}$$

En esta matriz $g_{jp} \in \{0, 1\}$, donde un cero significa que ese elemento será perforado, y un 1 significa que será transmitido. Como ejemplo, se

muestra una matriz de período $P = 4$ para un codificador como el mostrado en la Figura 2.6.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta matriz de perforado, se ve que los bits sistemáticos no son perforados y los bits de paridad son perforados alternadamente. Siguiendo la notación de la Figura 2.6, la secuencia transmitida sería:

$$x = \{x_{00}, x_{20}, x_{01}, x_{11}, x_{02}, x_{22}, x_{03}, x_{13}\} \quad (2.38)$$

donde x_{jt} corresponde al bit perteneciente a la rama j en el instante de tiempo t . Esta secuencia será repetida M/P veces hasta codificar los bits M de entrada. Así, la nueva tasa de código después de la perforación será:

$$R = \frac{P}{\omega(\mathbf{P})} \quad (2.39)$$

donde $\omega(\cdot)$ es el operador peso (cuenta elementos no nulos dentro de la matriz). Para el ejemplo presentado,

$$R = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Para el caso de no-perforado, $\omega(\mathbf{P}) = P \cdot J$ con lo que $R = 1/J$. Se puede comprobar que para el codificador analizado este valor concuerda con lo calculado inicialmente.

A pesar de lo simple que parece ser el perforado, éste puede realizarse de diferentes formas aún cuando se haya decidido no perforar los bits sistemáticos. Estos distintos patrones de perforado, que dan como resultado códigos de tasas iguales y generalmente diferentes desempeños, deben ser analizados y se debe decidir en favor de alguno de ellos. En general según lo estudiado en la literatura, no existen métodos analíticos que permitan encontrar los mejores patrones de perforado para un código dado, por lo cual la mayoría de los resultados disponibles son basados en simulaciones en las cuales se realizan búsquedas exhaustivas de polinomios generadores óptimos, y patrones de perforado óptimos, de tal forma de cumplir con algún objetivo predefinido normalmente en función de BER o BLER.

A pesar de lo anterior, en [39] se proponen reglas simples de diseño de la matriz de perforado las cuales son probadas para matrices simples. Estas reglas de diseño se pueden resumir como:

- Se debe evitar la perforación de los bits sistemáticos.
- El perforado se debe distribuir igualmente entre las distintas ramas del codificador. Esto se explicaría debido a que las dos ramas de bits de paridad juegan un rol idéntico en el decodificador y no sería justificable dar mayor importancia a una que a la otra.
- Las perforaciones dentro de una rama deberán estar lo más dispersas posibles, lo cual significa tratar de no perforar bits adyacentes dentro de una rama. Lo anterior es consecuencia de que perforaciones consecutivas destruyen la estructura del código.
- Permutaciones cíclicas de la matriz no afectan el desempeño. Esto significa que por ejemplo hacer un corrimiento de columnas hacia la derecha, intercambiando la última columna de la matriz por la primera, no afectará el desempeño del código.

Se destaca finalmente que este enfoque propuesto es válido sólo para tasas entre $1/3$ y $1/2$, pues para tasas mayores que $1/2$ la regla de no perforar bits consecutivos siempre se viola.

El otro enfoque tratado en la literatura es el presentado en [38] donde se encuentran los patrones de perforado y polinomios generadores óptimos por medio de simulación. Para realizar la perforación, en [38] se considera que para $2k$ bits sistemáticos se generarán dos bits de paridad, uno por cada RSC. Con lo anterior, las tasas de los turbo códigos generados y analizados en este documento son de la forma $k/(k+1)$ donde $2 \leq k \leq 16$.

Se define por simplicidad de notación el patrón de perforado como $P(q, p)$, donde q y p indican las posiciones en las filas correspondiente al primer RSC y segundo RSC en donde estarán los bits no-perforados. En forma análoga, $\bar{P}(q, p)$ corresponde a realizar la operación inversa de $P(q, p)$, es decir, $\bar{P}(q, p)$ perfora bits donde $P(q, p)$ no los perfora y viceversa. Para el ejemplo presentado anteriormente, el patrón de perforado sería $P(2, 1)$.

Finalmente, la Tabla 6.1 que se presenta en el Anexo C presenta los patrones de perforado óptimos seleccionados. Se debe notar que se agregó el patrón de perforado para tasa $1/2$ y de tasa $1/3$, además de los patrones

de perforado para $R = 5/9$, $6/10$ y $7/10$ los cuales fueron elegidos en forma empírica debido a que no era posible aplicar la reglas de [39], ni tampoco estaban en la lista presentada por [38].

Es importante notar que en [38] muestran que todos los códigos diseñados con $2 \leq k \leq 16$ están a una distancia menor que 1 dB de la capacidad del canal para un BER = 10^{-5} lo cual muestra que no existe una degradación notoria en el desempeño de los TC perforados cuando el patrón de perforado es elegido de forma adecuada.

2.4.3. Turbo decodificador

Como ya se mencionó al comienzo de este capítulo, la decodificación de un código turbo se realiza en base a decodificadores con entradas y salidas blandas (Soft Input Soft Output, SISO) y un proceso iterativo en donde los decodificadores intercambian esta información.

Un decodificador SISO básicamente es un decodificador que recibe información blanda como entrada y que genera información blanda a la salida y que de esta forma informa respecto a la confiabilidad de las decisiones que tomó. La forma más típica de presentar esta información blanda son las Razones Logarítmicas de Máxima Verosimilitud (Logarithmic Likelihood Ratio, LLR) las cuales son tratadas con detalle en la Sección 2.5.

La decodificación iterativa para el turbo codificador mostrado en la Figura 2.6 se detalla a continuación en base al esquema de la Figura 2.8. En esta figura Λ^{po} corresponde a la información *a-posteriori* que entrega el decodificador, mientras que Λ^{pr} corresponde a la información *a-priori* proveniente del otro componente decodificador. Los subíndices x , $c1$ y $c2$ hacen referencia a los bits de información, los bits de redundancia del primer codificador y a los bit de redundancia del segundo codificador respectivamente.

El proceso de decodificación comienza cuando el primer decodificador (Dec 1) utiliza la información blanda de los bits de información (Λ_x) y de los bits de paridad del codificador 1 (Λ_{c1}) para generar la información *a-posteriori* (Λ_x^{po}). Se destaca que para esta primera iteración el decodificador no cuenta con información *a priori* proveniente del codificador 2. El proceso sigue cuando a la información *a-posteriori* se le resta la información de los bits de información x para convertirse en la información extrínseca (Λ_x^{ext}) la cual es entrelazada y que el decodificador 2 utilizará como información *a-priori* junto a la información blanda de los bits de información que fueron entrelazados (Λ_x) y a la información blanda de los bits de paridad

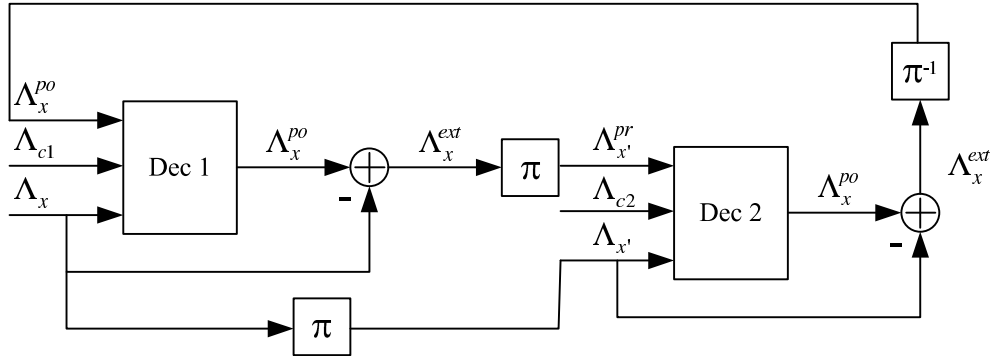


Figura 2.8. Esquema simplificado del turbo decodificador.

provenientes del primer codificador (Λ_{c2}). El segundo decodificador calcula la información *a-posteriori*, a la que se le resta la información de los bits de información entrelazados para generar la información extrínseca, la cual es a su vez desentrelazada para ser realimentada como información *a-priori* al primer decodificador de tal forma de comenzar la segunda iteración. Luego de esto, se repite el proceso, haciendo que disminuyan progresivamente los errores cometidos en la decodificación siendo utilizadas en la práctica normalmente 8 o más iteraciones [36].

A continuación se describen brevemente los algoritmos de decodificación más utilizados [37] :

- **Algoritmo MAP:** Este algoritmo fue propuesto en el año 1974 por Bahl, Cocke, Jelinek y Raviv en [40]. Si bien inicialmente fue propuesto para decodificar tanto códigos de bloque como convolucionales, el algoritmo es óptimo en términos de minimizar la BER para códigos convolucionales. Este algoritmo es de elevada complejidad de cálculo debido a la gran cantidad de multiplicaciones y exponenciales involucradas, razón por la cual se diseñaron algoritmos derivados de éste que disminuyen su complejidad.
- **Algoritmo Max-Log-MAP:** Este algoritmo nace como una simplificación del algoritmo MAP al trasladar las recursiones al plano logarítmico y al utilizar la aproximación Max-Log la cual analizará en la Sección 2.5.

- **Algoritmo Log-MAP:** Este algoritmo fue presentado en 1995 por Robertson *et al* en [41] y consiste en corregir la aproximación del algoritmo Max-Log-MAP usando el logaritmo Jacobiano. De esta manera este algoritmo es óptimos en términos de minimizar la BER y posee una complejidad de cálculo que lo ubica entre el algoritmo MAP y el algoritmo Max-Log-MAP.

2.5. Razones Logarítmicas de Máxima Verosimilitud

Tal como se mostró en la sección anterior, para la decodificación de la información que fue codificada y transmitida a través del canal, existe la necesidad de poseer una métrica blanda asociada a cada bit codificado. Usualmente, esta métrica suele calcularse en forma de las Razones Logarítmicas de Máxima Verosimilitud (Logarithmic Likelihood Ratio, LLR) las cuales pueden ser utilizadas para realizar una decisión dura respecto al bit transmitido, o bien una decisión blanda de tal forma de decodificar, por ejemplo, en forma iterativa como es el caso de los TC.

2.5.1. Definición de las LLR

La LLR se define en forma genérica para cada bit del símbolo transmitido como [42]:

$$\Lambda_l(r(k)) = \ln \left(\frac{P[x_l(k) = 1|r(k)]}{P[x_l(k) = 0|r(k)]} \right) \quad (2.40)$$

Al aplicar la regla de Bayes, y considerando los bits $x_l(k)$ como equiprobables, se puede expresar la ecuación anterior como [43]:

$$\Lambda_l(r(k)) = \ln \left(\frac{P[r(k)|x_l(k) = 1]}{P[r(k)|x_l(k) = 0]} \right) \quad (2.41)$$

La métrica dada por (2.41) corresponde a una representación de la probabilidad asociada a la transmisión de un bit uno o un bit cero. Si el valor de la LLR asociada a un determinado bit es negativo, se puede suponer que es más probable que el bit transmitido haya sido un 0, mientras que si la LLR es positiva, se puede suponer que el bit transmitido fue un 1. Lo anterior se explica debido a que la razón entre las probabilidades de la ecuación (2.41) es, en general, distinta de 1, por lo cual al aplicar la función logaritmo se transforma en un número mayor o menor a cero.

Adicionalmente, el valor absoluto de la LLR, $|\Lambda_l(r(k))|$, da cuenta de cuán confiable es la suposición respecto a $x_l(k)$. Una LLR muy negativa o muy positiva, indican que existe una alta probabilidad de que $x_l(k)$ haya sido 0 o 1 respectivamente. Por otro lado, cuando la magnitud de la norma de la LLR es cercana a cero, las estimaciones realizadas respecto al bit transmitido son menos confiables. Finalmente, para el caso extremo en el que $\Lambda_l(r(k)) = 0$ se cumplirá que $P[r(k)|x_l(k) = 1] = P[r(k)|x_l(k) = 0] = 0,5$ lo que indica que no existe información respecto al bit transmitido. Lo anterior es utilizado, por ejemplo, cuando se perforan bits en la transmisión, rellenando en el receptor la LLR asociada al bit perforado con un valor 0, dando de esta forma igual probabilidad respecto al valor del bit transmitido (o equivalentemente, dando nula información respecto a la transmisión del bit).

Como se mencionó anteriormente, la LLR puede ser utilizada en decodificadores de decisión dura, lo cual consiste simplemente en realizar operación signo sobre $\Lambda_l(r(k))$. Así, el bit estimado, $\tilde{x}_l(k)$, se calcula como [44]:

$$\tilde{x}_l(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda_l(r(k)) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \Lambda_l(r(k)) < 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

2.5.2. LLR para canal AWGN

Para un canal AWGN es posible expresar la ecuación (2.41) en función de los símbolos de la constelación y la SNR, tal como se muestra a continuación:

$$\Lambda_l(r(k)) = \ln \left(\frac{P[r(k)|x_l(k) = 1]}{P[r(k)|x_l(k) = 0]} \right) \quad (2.43)$$

$$= \ln \left(\frac{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^1} P[r(k)|x_l(k) = 1|s(k) = \alpha] \cdot P[s(k) = \alpha]}{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^0} P[r(k)|x_l(k) = 0|s(k) = \alpha] \cdot P[s(k) = \alpha]} \right) \quad (2.44)$$

$$= \ln \left(\frac{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^1} P[r(k)|s(k) = \alpha]}{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^0} P[r(k)|s(k) = \alpha]} \right) \quad (2.45)$$

$$= \ln \left(\frac{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^1} \frac{1}{\pi \sigma^2} \cdot \exp \left(-\frac{|r(k) - \alpha|^2}{\sigma^2} \right)}{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^0} \frac{1}{\pi \sigma^2} \cdot \exp \left(-\frac{|r(k) - \alpha|^2}{\sigma^2} \right)} \right) \quad (2.46)$$

$$= \ln \left(\frac{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^1} \exp \left(-\Gamma |r(k) - \alpha|^2 \right)}{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^0} \exp \left(-\Gamma |r(k) - \alpha|^2 \right)} \right) \quad (2.47)$$

El desarrollo anterior se basa en condicionar las probabilidades sobre todos los posibles símbolos de la constelación que poseen en la l -ésima posición un 0 o un 1 respectivamente. Luego se suponen bits equiprobable y por ende símbolos equiprobables, para finalmente obtener la ecuación (2.47) que corresponde a la expresión general de la LLR para un canal AWGN.

2.5.3. LLR simplificadas para canal AWGN

Debido a que la expresión general de la LLR para un canal AWGN dada por (2.47) es numéricamente costosa debido a que la suma de exponenciales crece a medida que las constelaciones se hacen mas grandes, surge la necesidad de realizar el cálculo de manera más eficiente. Para lograr esto, se utiliza la aproximación Max-Log, la cual se puede escribir como:

$$\ln \sum_{\forall i} \exp(\lambda_i) \approx \max_{\forall i} (\lambda_i) \quad (2.48)$$

Se debe destacar que la aproximación Max-Log dada por (2.48) es una buena aproximación sólo cuando existe un valor dominante entre los λ_i .

Con la aproximación (2.48) es posible expresar (2.47) como:

$$\Lambda'_l(r(k)) = \ln \left(\frac{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^1} \exp(-\Gamma|r(k) - \alpha|^2)}{\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^0} \exp(-\Gamma|r(k) - \alpha|^2)} \right) \quad (2.49)$$

$$= \ln \left(\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^1} (\exp(-\Gamma|r(k) - \alpha|^2)) \right) - \ln \left(\sum_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^0} (\exp(-\Gamma|r(k) - \alpha|^2)) \right) \quad (2.50)$$

$$\approx \Gamma \left(\max_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^1} (-|r(k) - \alpha|^2) - \max_{\forall \alpha \in \mathcal{X}_l^0} (-|r(k) - \alpha|^2) \right) \quad (2.51)$$

Debido a que para relaciones señal a ruido altas el símbolo recibido estará muy cercano al símbolo transmitido, aparecerán dos exponenciales dominantes en (2.50), dando como resultado que el cálculo de las métricas utilizando la aproximación Max-Log será una buena aproximación sólo para valores de SNR altas.

2.5.4. Distribución de las LLR

En general, y debido a que estas métricas son a nivel de bit, y que cada bit está inserto dentro de un símbolo transmitido a través del canal, no existen expresiones analíticas que permitan conocer la distribución de probabilidad de las LLR al utilizar esquemas de modulación mayores a 4-QAM. Si embargo, es posible demostrar que las distribuciones de las LLR para 4-QAM (y también para 2-PSK) corresponden a distribuciones normales.

Para 4-QAM, al utilizar el mapeo Gray presentado en el Anexo A, es posible expresar (2.47) como [45, App. C]:

$$\Lambda_1^{4\text{-QAM}}(r(k)) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sigma^2} \Im\{r(k)\} \quad \Lambda_2^{4\text{-QAM}}(r(k)) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sigma^2} \Re\{r(k)\} \quad (2.52)$$

donde $\Re\{\cdot\}$ e $\Im\{\cdot\}$ denotan partes real e imaginaria respectivamente.

Debido a que $r(k)$ se distribuye en forma gaussiana compleja debido a la naturaleza del canal, es posible demostrar que las LLR también se distribuyen

en forma gaussiana tal como se muestra a continuación:

$$\Lambda_1^{4\text{-QAM}}(r(k)) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sigma^2} \cdot \Im\{r(k)\} \quad (2.53)$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{\sigma^2} \cdot \Im\{s(k) + \eta(k)\} \quad (2.54)$$

$$\sim -\frac{2\sqrt{2}}{\sigma^2} \cdot \mathcal{N}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2.55)$$

$$\sim \mathcal{N}\left(\pm\frac{2}{\sigma^2}, \frac{4}{\sigma^2}\right) \quad (2.56)$$

$$\sim \mathcal{N}(\pm 2\Gamma, 4\Gamma) \quad (2.57)$$

Con un razonamiento análogo, es posible demostrar que $\Lambda_2^{4\text{-QAM}}(r(k))$ es exactamente igual al resultado presentado en la ecuación (2.57), es decir,

$$\Lambda_1^{4\text{-QAM}}(r(k)) \sim \Lambda_2^{4\text{-QAM}}(r(k)) \sim \mathcal{N}(\pm 2\Gamma, 4\Gamma) \quad (2.58)$$

Se destaca que el signo \pm en las distribuciones normales aparece debido a que el bit transmitido dentro del símbolo $s(k)$ puede ser un 0 o un 1, y se destaca además que independiente de la posición que ocupe el bit dentro del símbolo 4-QAM, éste es afectado de igual forma por el canal, situación que no ocurre para constelaciones mayores en donde existe un diferente grado de protección de acuerdo a la posición del bit dentro del símbolo.

Recientes estudios presentados en [44] permiten expresar las distribuciones de las LLR para 16-QAM al utilizar mapeo Gray y aproximación Max-Log. En este trabajo se demuestra que las funciones de densidad de probabilidad de las LLR asociadas al bit en las posiciones 2 y 4 corresponden a distribuciones gaussianas por tramos. Los resultados de [44], que serán utilizados más adelante en este trabajo para validar las simulaciones, se pueden resumir como:

$$p(\Lambda_2^{16\text{-QAM}}|\alpha_R) = \begin{cases} \frac{1}{8\Delta\sqrt{\pi\Gamma}} \cdot \exp\left[-\frac{(\Lambda_2^{16\text{-QAM}} + \Psi(\alpha_R - \Delta))^2}{\sigma^2(\Psi)^2}\right] & \text{si } \Lambda_2^{16\text{-QAM}} \leq -\Psi \\ \frac{2}{8\Delta\sqrt{\pi\Gamma}} \cdot \exp\left[-\frac{(2\Lambda_2^{16\text{-QAM}} + \Psi\alpha_R)^2}{\sigma^2(\Psi)^2}\right] & \text{si } -\Psi < \Lambda_2^{16\text{-QAM}} \leq \Psi \\ \frac{1}{8\Delta\sqrt{\pi\Gamma}} \cdot \exp\left[-\frac{(\Lambda_2^{16\text{-QAM}} + \Psi(\alpha_R + \Delta))^2}{\sigma^2(\Psi)^2}\right] & \text{si } \Lambda_2^{16\text{-QAM}} > \Psi \end{cases}$$

$$p(\Lambda_4^{16\text{-QAM}}|\alpha_R) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda_4^{16\text{-QAM}} < -\Psi \\ \frac{2}{8\Delta\sqrt{\pi\Gamma}} \cdot \exp\left[-\frac{(2\Lambda_4^{16\text{-QAM}} - \Psi(\alpha_R - 2\Delta))^2}{\sigma^2(\Psi)^2}\right] + \\ \frac{2}{8\Delta\sqrt{\pi\Gamma}} \cdot \exp\left[-\frac{(2\Lambda_4^{16\text{-QAM}} - \Psi(\alpha_R + 2\Delta))^2}{\sigma^2(\Psi)^2}\right] & \text{si } \Lambda_4^{16\text{-QAM}} \geq -\Psi \end{cases}$$

donde se ha definido $\Psi = 8\Gamma\Delta^2$ por simplicidad de notación, Δ corresponde a mitad de la distancia mínima entre dos símbolos de la constelación ($\Delta = 1/\sqrt{10}$ para el caso normalizado), y α_R corresponde a la parte real del símbolo transmitido.

Se destaca que las expresiones anteriores son desarrolladas condicionando primero en la posición del bit y luego en el valor de α_R . Si se considera el mismo procedimiento para el bit en la posición 1 y 3, condicionando en la parte imaginaria del símbolo, α_I , es posible demostrar que:

$$p(\Lambda_1|\alpha_I) = p(\Lambda_2|\alpha_R) \quad \text{y} \quad p(\Lambda_3|\alpha_I) = p(\Lambda_4|\alpha_R) \quad (2.59)$$

Lo anterior se puede explicar debido a que el comportamiento de los valores del mapeo para el bit en la posición 2 en función de α_R son los mismo que los valores para el bit en la posición 1 en función de α_I .

Finalmente, y debido a que $\alpha_R = \{-3\Delta, -\Delta, +\Delta, +3\Delta\}$ tal como se muestra en la Figura 2.9, se cuenta con 8 funciones de densidad de probabilidad, cada una de ellas definidas por tramos de acuerdo al valor de la LLR. Como en este trabajo se está interesado en la mezcla de los bits, es decir, se calculan las funciones de densidad de probabilidad asociadas a un 1 o un 0 transmitidos sin importar la posición, se tendrá que:

$$p(\Lambda^{16\text{-QAM}}|x_l(k) = 0) = \frac{1}{4}(p(\Lambda_4^{16\text{-QAM}}| + \Delta) + p(\Lambda_4^{16\text{-QAM}}| + 3\Delta) + p(\Lambda_2^{16\text{-QAM}}| - \Delta) + p(\Lambda_2^{16\text{-QAM}}| + \Delta)) \quad (2.60)$$

$$p(\Lambda^{16\text{-QAM}}|x_l(k) = 1) = \frac{1}{4}(p(\Lambda_4^{16\text{-QAM}}| - 3\Delta) + p(\Lambda_4^{16\text{-QAM}}| - \Delta) + p(\Lambda_2^{16\text{-QAM}}| - 3\Delta) + p(\Lambda_2^{16\text{-QAM}}| + 3\Delta)) \quad (2.61)$$

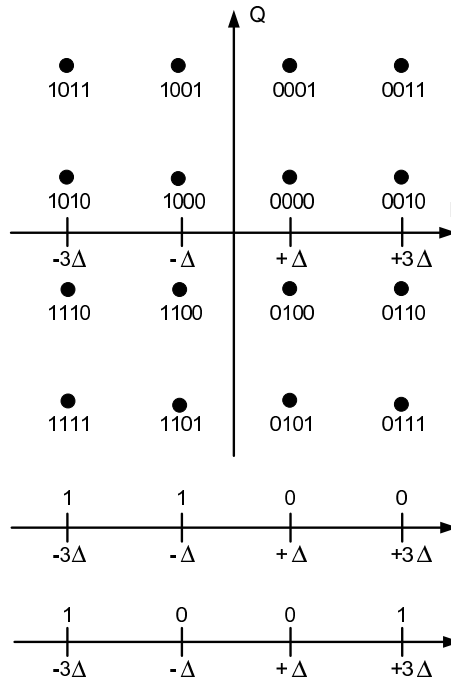


Figura 2.9. Constelación 16-QAM con mapeo Gray. Se muestran los valores del mapeo para el bit en la posición 4 y en la posición 2.

2.6. El Límite de Gallager

Una forma comunmente utilizada de demostrar el teorema de capacidad de canal es mediante la utilización del Límite de Gallager (Gallager Bound, GB) aplicado a la probabilidad de error de bloque, cuando se utiliza transmisión con codificación en bloque [35]. Este límite presentado en 1965 por Robert Gallager en [46] permite acotar la probabilidad de error de bloque para un código cualquiera tomando en consideración el largo del bloque y la tasa de código utilizados. Una de las mayores ventajas de esta cota es que no se aplica a una técnica específica de codificación y no requiere información acerca de la estructura exacta del código, si no que depende sólo de características básicas tales como el largo del bloque y la tasa de código [28].

El GB se basa en la idea propuesta por Shannon de evaluar la probabilidad de error sobre todos los posibles códigos, para una tasa de código y largo de bloque dados, y posteriormente concluir que al menos uno de estos códigos

va a presentar una probabilidad de error menor que el promedio. Así, este promedio es una cota superior para el código óptimo [27, Ch. 3].

En base a la revisión bibliográfica realizada en este trabajo, se pudo comprobar que el GB no ha sido muy utilizado en la literatura, mas aún, siempre ha sido usado para sistemas de transmisión que utilizan modulación binaria (Binary Phase Shift Keying, BPSK) [28] [35] [47]. Dentro de las publicaciones en donde se trata el tema se encuentran:

- En [47] se analiza la interconexión entre el GB y otros límites que permiten acotar la probabilidad de error de bloque. En este trabajo se discuten varias cotas para la probabilidad de error en la decodificación y se muestran las interconexiones existentes entre ellas. En [47] se enfocan en el Límite de Duman y Salehi (Duman and Salehi Bound, DS2 Bound) el cual se origina del GB [46].
- En [35] se analiza utilizando el GB la sugerencia que los TC son los denominados “Códigos de Shannon”. En este trabajo se presentan el GB y el Sphere Packing Bound (SPB), el cual corresponde al caso más general del GB, y se analiza la interconexión entre ellos. En este trabajo se utiliza el SPB como una herramienta para comparar el desempeño de los turbo códigos en función de la capacidad de canal.
- En [28] utilizan el SPB para proponer un método analítico que permite evaluar el máximo desempeño de técnicas de transmisión utilizando códigos de bloque sobre canales con desvanecimientos entrelazados en forma no ideal.

Según Gallager [48], la probabilidad de error de bloque para un canal sin memoria y una distribución de los símbolos de entrada $q(x)$ sin memoria se puede acotar por:

$$P_B < 2^{-N \cdot E(R)} \quad (2.62)$$

donde

$$E(R) = \max_q \left[\max_{0 \leq \rho \leq 1} [E_0(\rho, q) - \rho R] \right] \quad (2.63)$$

con

$$E_0(\rho, q) = -\log_2 \sum_y \left[\sum_x q(x) p(y|x)^{1/(1+\rho)} \right]^{1+\rho} \quad (2.64)$$

y donde ρ es un parámetro de optimización, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ corresponden a los símbolos posibles que pueden ser seleccionados para transmitir, $q(x_i)$ es la función de masa de probabilidad asociada a la elección de x_i con $i = 1, 2, \dots, M$, R es la tasa de código utilizada, y es la observación a la salida del canal la cual es de largo N , y $p(y|x)$ es la función de densidad de probabilidad condicional de recibir y dado que se transmitió x .

Capítulo 3

Análisis del Problema

Debido a que la AMC es una técnica que está siendo utilizada actualmente en los sistemas de comunicación, y que probablemente se seguirá utilizando a futuro, existen una variada gama de problemas que abordar. En este trabajo se desea analizar la AMC en términos optimizar el desempeño del sistema eligiendo de forma adecuada el esquema de modulación y la tasa de código, así como evaluar el comportamiento del sistema en casos más realistas que los enfoques dados desde un punto de vista de capacidad de canal, para finalmente contrastar con resultados obtenidos al simular códigos potentes con aplicaciones prácticas como son los Turbo Códigos.

Más concretamente, este trabajo tiene como objetivos específicos:

- Determinar el esquema de modulación y tasa de código óptimos en un sistema que utiliza AMC sobre un canal Gaussiano casi estático en función de la SNR.
- Analizar el impacto al considerar un largo de bloque finito y al utilizar métricas calculadas en forma simplificada, y contrastar los resultados con los análisis de capacidad existentes en la literatura.
- Analizar la degradación en el desempeño del sistema al considerar un canal con desvanecimientos lentos.
- Comparar resultados al considerar un sistema en donde el largo de bloque de información es constante con un sistema en donde el largo del bloque de símbolos es constante.

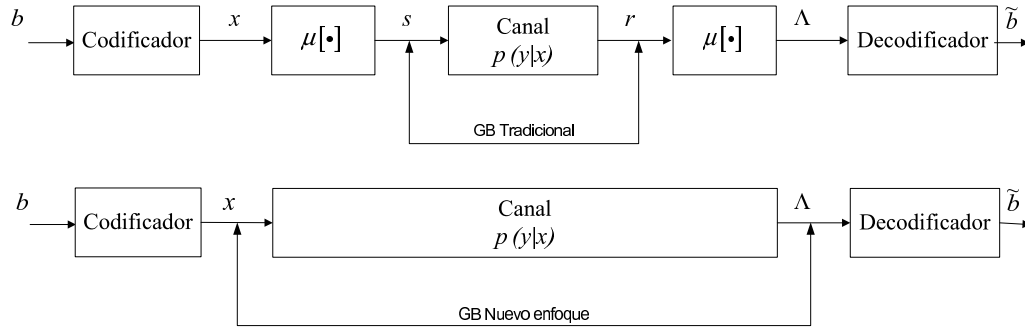


Figura 3.1. Comparación entre el enfoque tradicional para evaluar el GB (arriba) y el nuevo enfoque propuesto en este trabajo (abajo).

- Contrastar resultados teóricos con simulación de códigos potentes con aplicaciones prácticas, específicamente con los TC.

Para determinar las tasas de código óptimas así como el esquema de modulación y el impacto al considerar un largo de bloque finito, en este trabajo se propone utilizar como herramienta de análisis el Límite de Gallager presentado en la Sección 2.6.

Debido a que se consideran esquemas de modulación M -PSK y M -QAM con eficiencias mayores a 2[bit/símbolo], en este trabajo se debe extender el uso del GB a este tipo de constelaciones lo cual no ha sido reportado en la literatura según el conocimiento del autor de este trabajo.

Si bien el GB es definido en términos de símbolos a la entrada del canal, en este trabajo se considera aplicar el GB a nivel de bit, es decir, se consideran que las entradas al canal son datos binarios, y que las salidas del canal serán las métricas asociadas a cada bit transmitido a través del canal. Estas métricas serán presentadas en forma de LLR definidas en la Sección 2.5. En la Figura 3.1 se presenta una comparación entre el enfoque tradicional utilizado para evaluar el GB (a nivel de símbolo) y el nuevo enfoque propuesto (a nivel de bit).

Para el caso estudiado en este trabajo que considera datos binarios equiprobables se tendrá que $q(x) = 1/2$, y debido a que las métricas a la salida del canal son continuas, la suma sobre y de la ecuación (2.64) se transforma en una integral sobre todo el rango posible de y , obteniéndose de esta forma:

$$P_B < 2^{-N \cdot E(R)} \quad (3.1)$$

donde

$$E(R) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} [E_0(\rho) - \rho R] \quad (3.2)$$

con

$$E_0(\rho) = -\log_2 \int_y \left[\sum_x \left(\frac{1}{2} \right) p(y|x)^{1/(1+\rho)} \right]^{1+\rho} dy \quad (3.3)$$

donde $x = \{0, 1\}$ corresponde a los bits a transmitir, ρ es un parámetro de optimización, R la tasa de código utilizada por el codificador, N el largo de bloque a la salida del codificador, y es la métrica en forma de LLR asociada al bit transmitido, y $p(y|x)$ es la función de densidad de probabilidad condicional de la LLR dado que se transmitió x .

En este punto aparece como evidente la necesidad de conocer las funciones de densidad de probabilidad de las LLR asociadas a la transmisión de un bit 0 y un bit 1, de tal forma de poder evaluar la ecuación (3.3). Se destaca que aún si se conocen analíticamente las funciones de densidad de probabilidad de las LLR, las anteriores ecuaciones deben ser evaluadas numéricamente para un determinado valor de N y R . En general, se debe recurrir a simulación para poder encontrar las funciones de densidad de probabilidad de las LLR, calculadas tanto en forma exacta como en forma aproximada de acuerdo a la aproximación Max-Log presentada en (2.51).

Una vez evaluada la probabilidad de error de bloque asociada a un determinado largo de bloque, esquema de modulación y tasa de código, y debido a que la ecuación (3.1) corresponde a una cota máxima para el desempeño del sistema en términos de BLER, se podrá calcular el throughput que un sistema de este tipo podría alcanzar de acuerdo a la ecuación (2.8):

$$\theta(P_B, \mathcal{X}, R) = (1 - P_B) \cdot \log_2(M) \cdot R \quad (3.4)$$

Una vez determinado el throughput, dado cierto valor para el largo de bloque N_s (lo que determina el valor de N), cierto valor de SNR, un determinado esquema de modulación y cierta tasa de código, es posible calcular la tasa de código y esquema de modulación que maximizan el throughput como:

$$[\bar{\mathcal{X}}, \bar{R}] = \arg \max_{\mathcal{X}, R} \{\theta(P_B, \mathcal{X}, R)\} \quad (3.5)$$

donde la maximización se realiza para todo el rango de SNR optimizando \mathcal{X} y R .

De esta forma es posible obtener el throughput, denotado por \bar{C} , escogiendo los parámetros de la transmisión, como:

$$\bar{C} = \theta(P_B, \bar{\mathcal{X}}, \bar{R}) \quad (3.6)$$

Con el procedimiento anterior es posible entonces determinar la tasa de código y el esquema de modulación óptimos para un sistema que utiliza AMC sobre un canal Gaussiano casi estático en función de la SNR.

Como el valor de throughput obtenido en base al análisis utilizando el GB es más realista que el enfoque en términos de capacidad de canal pues toma en consideración el largo del bloque utilizado, es posible determinar la dependencia que existe entre \bar{C} y N_s simplemente repitiendo el procedimiento descrito anteriormente para distintos valores de N_s . Por otro lado, si el decodificador calcula las LLR en forma aproximada de tal forma de reducir la complejidad de cálculo de acuerdo a la ecuación (2.51), es posible calcular nuevamente el throughput que el sistema podría lograr, el cual es denotado por \bar{C}' , el esquema de modulación y tasa de código óptimos, esta vez utilizando los histogramas simulados de las LLR cuando se calcularon las métricas en forma simplificada.

Por otra parte, desde un punto de vista de capacidad de canal, los resultados presentados en [31] permiten calcular las tasas de código y los esquemas de modulación óptimos para el sistema BICM analizado en base a las curvas mostradas en la Figura 2.4. Por un lado, la máxima cantidad de información que se puede transmitir a través del canal utilizando el esquema BICM viene dado por \hat{C} , mientras que la tasa de código óptima (\hat{R}) se calculará simplemente dividiendo la capacidad del canal en el orden del esquema de modulación:

$$\hat{R} = \frac{\hat{C}}{\log_2(M)} \quad (3.7)$$

A nivel de comparación, el throughput dado por la ecuación (3.6) se puede relacionar con la capacidad BICM según:

$$\bar{C} \leq \hat{C} \quad (3.8)$$

donde la igualdad se cumple cuando $N \rightarrow \infty$ debido a que a medida que se aumenta N , se acerca a la suposición de codificación con largo infinito usado en el análisis de capacidad.

Adicionalmente, si las métricas son calculadas utilizando la aproximación Max-Log y debido a que esta aproximación es buena aproximación solamente

para SNR altos, se cumplirá que:

$$\bar{C}' \leq \bar{C} \leq \hat{C} \leq \tilde{C} \quad (3.9)$$

donde $\bar{C}' \rightarrow \bar{C}$ cuando $\Gamma \rightarrow \infty$.

Si se analizan los valores de SNR en donde sería óptimo cambiar el esquema de modulación, a nivel de capacidad de canal de la Figura 2.4 es posible determinarlos al encontrar los puntos de intersección de las curvas de capacidad para los esquemas de modulación que maximizan la capacidad sobre todo el rango de SNR. Sin embargo, estos umbrales no corresponden a valores realistas pues este análisis es hecho términos de capacidad de canal y por ende supone un código perfecto de largo infinito, con un esfuerzo ilimitado en la decodificación. Por otro lado, la herramienta presentada en este trabajo permite predecir el comportamiento de los umbrales de cambio de esquema de modulación en función del largo de bloque que se esté utilizando en la transmisión. Se debe notar que aún cuando este nuevo enfoque es más realista, y dado que el análisis se basa en el uso de una cota máxima, se espera que códigos reales logren desempeños inferiores a esta cota.

Por otro lado, si se considera un canal con desvanecimientos lentos, es decir, un canal en donde el tiempo de coherencia es mucho mayor a la duración de un bloque y por ende se puede suponer que durante la transmisión del bloque la SNR se mantiene constante, es posible calcular el throughput que el sistema alcanzaría en base a la curva de \bar{C} en función de Γ calculado en base al GB tal como se describió en esta sección. Así, el valor del throughput en un canal con desvanecimientos lentos estará dado por:

$$\bar{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Gamma}(\gamma) \cdot \bar{C}(\gamma) d\gamma \quad (3.10)$$

donde $f_{\Gamma}(\gamma)$ es la función de densidad de probabilidad asociada a la variable aleatoria γ que representa la SNR instantánea que varía bloque a bloque, cumpliéndose que:

$$\Gamma = E[\gamma] = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma f_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \quad (3.11)$$

Finalmente cabe destacar que si bien se ha detallado el procedimiento para encontrar los valores de los parámetros que optimizan el desempeño del sistema en forma teórica, resulta interesante comparar estos valores con el desempeño de códigos reales potentes como son los TC, y de esta forma determinar cuán preciso es el análisis. Para este efecto, simplemente es necesario

simular TC utilizando distintos esquemas de modulación y diferentes tasas de código las cuales serán logradas en base al procedimiento de perforado mostrado en la Sección 2.4.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos a través del desarrollo del trabajo. Inicialmente se analiza la simulación de los histogramas de las LLR de tal forma de validar los resultados obtenidos, luego se presentan los resultados a nivel de capacidad de canal, para luego mostrar los resultados numéricos asociados a la evaluación del GB. Finalmente se compararan los distintos resultados con las simulaciones de los TC.

4.1. Razones Logarítmicas de Máxima Verosimilitud

Como ya se explicó en el capítulo anterior, y debido a que en general no existen expresiones analíticas que representen la distribución de probabilidad de las LLR, es necesario realizar simulaciones de tal forma de obtener los histogramas de los mismos y de esta forma poder evaluar el GB. A continuación se detallan los parámetros utilizados en las simulaciones, así como se validan los resultados presentados en este trabajo.

4.1.1. Elección de parámetros de simulación

En el cálculo de los histogramas se deben tener en cuenta varios factores que determinan un correcto resultado de la simulación:

- **Rango:** Corresponde al rango en el eje de las abscisas que será considerado. Debe ser lo suficientemente grande para no sesgar el histograma, y al mismo tiempo no puede ser excesivamente amplio pues se reducirá la resolución del histograma cuando se ha fijado la cantidad de bins.

- **Cantidad de Bins:** Corresponde a la cantidad de divisiones del eje de las abscisas. Debe ser escogido de tal forma de que no sea tan grande que produzca un efecto de no suavidad, ni tan pequeño que se produzca un efecto de discontinuidad.
- **Numero de Datos:** Es la cantidad de datos que se deben simular de tal forma de, dado un cierto rango y cantidad de bins, asegurar que los histogramas se comporten adecuadamente.

Los tres parámetros anteriores están íntimamente relacionados y deben ser escogidos de manera adecuada de tal forma de que los histogramas reflejen fielmente la distribución de los datos simulados. El procedimiento será primero fijar el rango de los datos y luego decidir de forma adecuada la cantidad de bins y numero de datos a simular.

Los histogramas simulados corresponden a dos histogramas por cada esquema de modulación y por cada valor de SNR. Se simula un histograma de las LLRs obtenida cuando el bit transmitido es cero ($x(n) = 0$), y otro para cuando el bit transmitido es uno ($x(n) = 1$).

Para efectos de simulación se consideró un bloque de 100.000 bits aleatorios a la salida del codificador, los cuales son mapeados por el modulador, transmitidos a través del canal, recibidos, para finalmente realizar el cálculo de las LLR de cada bit tal como se indica en (2.47) o (2.51) para el cálculo exacto con la aproximación Max-Log respectivamente. Una vez obtenido el vector de LLR (de largo 100.000) se obtiene el histograma y se guarda.

El procedimiento anterior se repite K veces para luego promediar aritméticamente, por cada punto del histograma, las K repeticiones. Luego de esta ponderación, se obtiene el histograma final que corresponde al histograma promedio de los K histogramas simulados.

Dado que las LLR aumentan en magnitud a medida que la SNR aumenta, el rango del histograma también varía. Debido a esto se simuló un bloque de 100.000 para cada esquema de modulación y relación SNR, de tal forma de obtener los valores máximos de los histogramas, quedando de esta forma determinados el rango de éstos. Se destaca que para cada esquema de modulación se encontró empíricamente un rango de SNR dentro del cual las simulaciones resultan de interés. Este rango va desde $\Gamma_{\min} = -10$ dB y Γ_{\max} [dB] donde este último valor depende del orden del esquema de modulación. En la Tabla 4.1 se presentan los valores de Γ encontrados para realizar las simulaciones. Se considera además un paso en Γ de 1 dB.

Tabla 4.1. *Rango empírico de SNR encontrado para realizar las simulaciones en función del orden del esquema de modulación.*

$\log_2(M)$	Γ_{\min} [dB]	Γ_{\max} [dB]
2	-10	12
3	-10	18
4	-10	20
5	-10	24
6	-10	24

4.1.2. Validación de las simulaciones

Debido a que la simulación de los histogramas de las LLR juegan un papel fundamental en la evaluación del GB, es necesario poder validar los parámetros que se eligieron para simular los histogramas. Para este efecto, inicialmente se comparan los resultados obtenidos al evaluar analíticamente las funciones de densidad de probabilidad (probability density function, pdf) de las LLR para 16-QAM al utilizar aproximación Max-Log presentadas en la Sección 2.5.4 con los resultados de la simulación. En la Figura 4.1 se muestra esta comparación para distintas relaciones señal a ruido destacándose que el valor elegido para K es 500 y 5.000 bins en la partición⁵. Se destaca en esta figura que los histogramas no son simétricos, es decir $p(\Lambda|x(n) = 0) \neq -p(\Lambda|x(n) = 1)$.

Si bien en general se aprecia que la simulación se ajusta al resultado analítico de buena manera, para poder validar la simulación de las LLR es necesario analizar cómo se comporta el resultado final del proceso (que utiliza como un dato de entrada los histogramas de las LLR), es decir, como varía el throughput máximo al utilizar los histogramas de las LLR en comparación con el uso de las expresiones analíticas. En la Figura 4.2 se muestra esta comparación donde es posible apreciar que las curvas coinciden perfectamente para todo el rango de SNR. Se debe notar que fue posible comprobar que el error relativo era menor que $8 \cdot 10^{-3}$ [bit/s/Hz] para todo el rango de SNR, notándose además que estos errores eran mayores para SNR bajos,

⁵La elección de simular 100.000 bits y repetir 500 veces, y no simular 500.000 bits repitiendo 100 veces por ejemplo, se justifica simplemente debido a que para efectos de simulación era menos costoso.

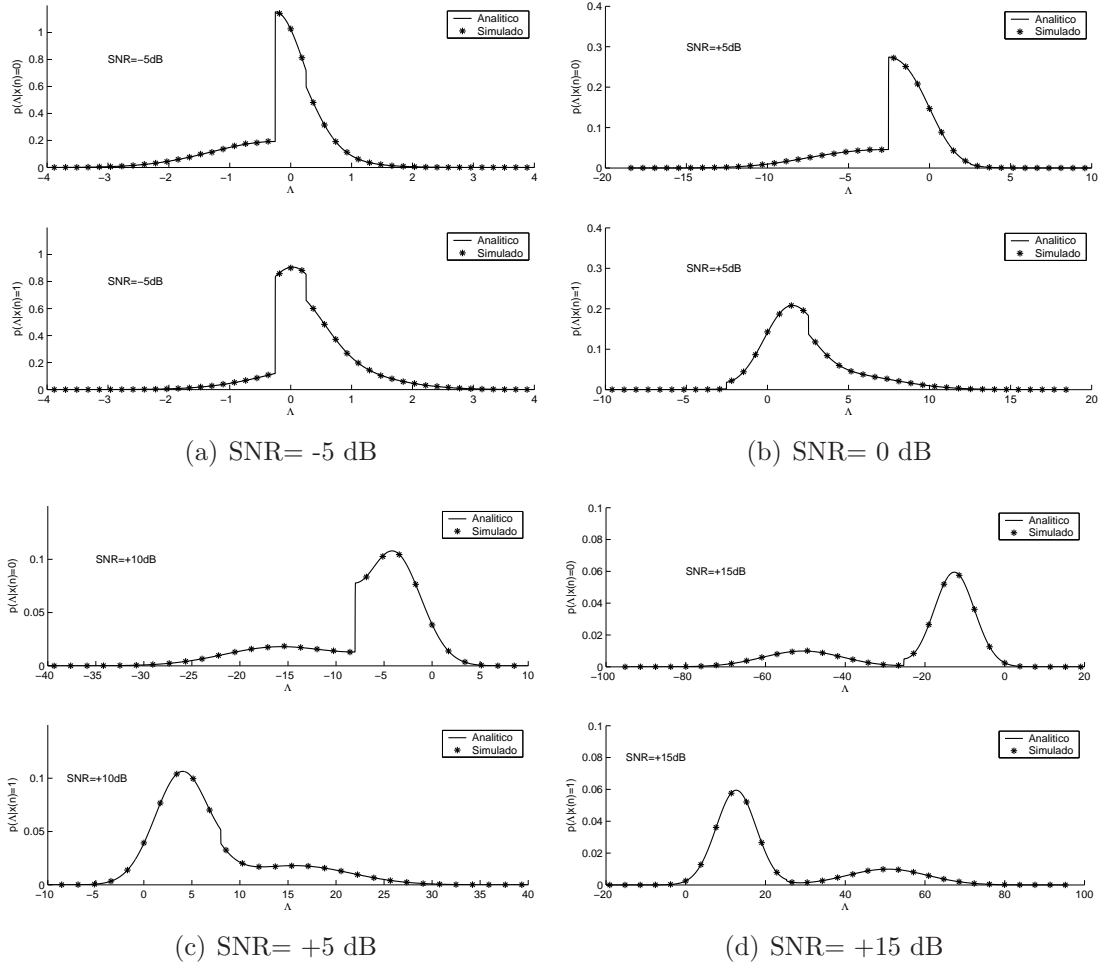


Figura 4.1. Comparación de histogramas calculados en forma analítica y los resultados de la simulación para distintos valores de SNR.

lo cual se especula es debido a inestabilidades numéricas producto de las discontinuidades en las pdfs que se acentúan para SNR bajos.

Aún cuando no se muestra en una figura, se realizó el mismo proceso de validación para 4-QAM encontrándose idénticos resultados. Lo anterior valida la elección de los parámetros para la simulación, a saber, 100.000 bits en histogramas de 5.000 bins los cuales son promediados sobre 500 repeticiones. Finalmente se destaca que aún cuando la validación de la simulación se realizó sólo para 4-QAM, 16-QAM y para Max-Log, se extrapolan las conclu-

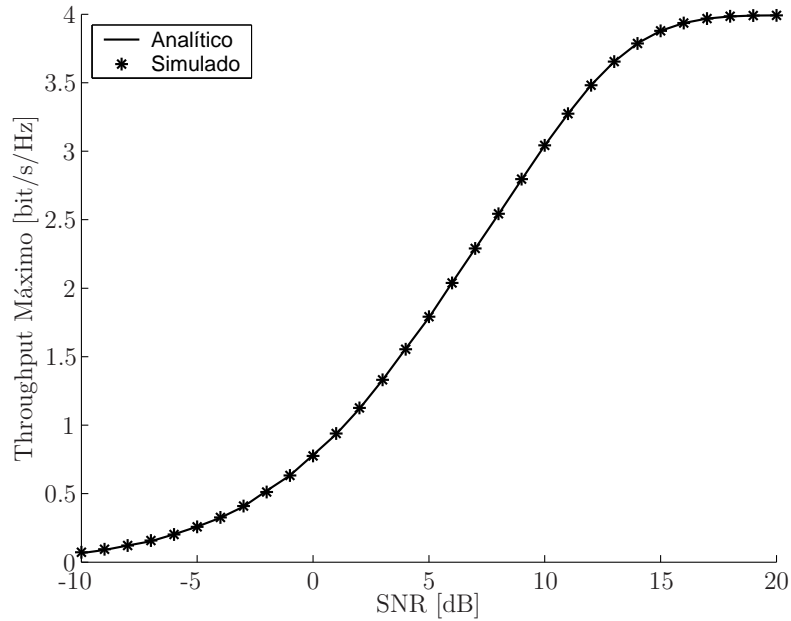


Figura 4.2. Comparación del throughput máximo al utilizar expresiones analíticas para las pdfs dadas en la Sección 2.5.4 (línea continua) y la simulación de los histogramas (*).

siones para otros esquemas de modulación y también para el cálculo de las LLR en forma exacta. Por un lado, no existe motivo para creer que aumente el error al utilizar otras constelaciones, y por otro lado, al realizar el cálculo de las LLRs en forma exacta, se pudo comprobar que los histogramas son mas suaves, lo cual reduciría el error relativo, y por ende también reducirá el error en el cálculo final de throughput.

4.2. Capacidad de Canal

En las siguientes secciones se presentan los resultados numéricos obtenidos al evaluar los desarrollos mostrados en la Sección 2.2. Lo anterior incluye los resultados para el análisis de CM y para BICM.

4.2.1. Capacidad de Modulación Codificada

Tal como ya fue presentado en la Sección 2.2.2, al evaluar numéricamente la ecuación (2.32) que determina la capacidad de CM para todos los esquemas de modulación considerados en este trabajo, se obtuvieron los resultados presentados en la Figura 2.2. En esta figura se puede apreciar claramente los resultados sub-óptimos que se obtienen con las constelaciones M -PSK en comparación con las constelaciones M -QAM desde un punto de vista de capacidad de canal. Se destaca además que la constelación que maximiza la capacidad de canal para todo el rango de SNR es 64-QAM.

4.2.2. Capacidad BICM

Tal como ya fue presentado en la Sección 2.2.3, en la Figura 4.3 se muestran los resultados al evaluar la ecuación de capacidad para el modelo BICM dada por (2.4) para todos los esquemas de modulación analizados en este trabajo. Nuevamente es posible apreciar que, desde un punto de vista de capacidad de canal, los esquemas M -PSK se comportan en forma sub-óptima en comparación con los esquemas M -QAM, exceptuando el caso de 8-PSK/8-QAM el cual es mostrado con detalle en la Figura 4.4. En esta figura se aprecia que no existe un esquema de modulación que sea óptimo para todo el rango de SNR, si no que intercambian los papeles de acuerdo a si Γ es mayor o menor a 7 dB.

En la Figura 4.3 se destacan además los umbrales de SNR en donde se debería cambiar el esquema de modulación de tal forma de maximizar la capacidad de canal para todo el rango de SNR. Se define γ_0^{BICM} como el umbral que determina el cambio de esquema de modulación entre 4-QAM y 16-QAM mientras que γ_1^{BICM} determina el cambio entre 16-QAM y 64-QAM.

Se destaca que, desde un punto de vista de capacidad de canal, para el modelo BICM sólo son necesarios tres esquemas de modulación, a saber 4,16,32-QAM, de tal forma de maximizar la capacidad de canal para todo el rango de SNR. Este resultado contrasta con el análisis que se puede realizar de CM mostrada en la Figura 2.2, en donde se puede apreciar que sólo es necesaria una constelación para maximizar la capacidad de canal⁶, aún cuando en la práctica esto sea complicado de lograr debido a problemas de sincronización para SNR bajos. Lo anterior demuestra que el uso de AMC es

⁶Para ser más preciso, las curvas de capacidad de CM se intersectan cerca de 10 dB pero el cambio en capacidad es imperceptible.

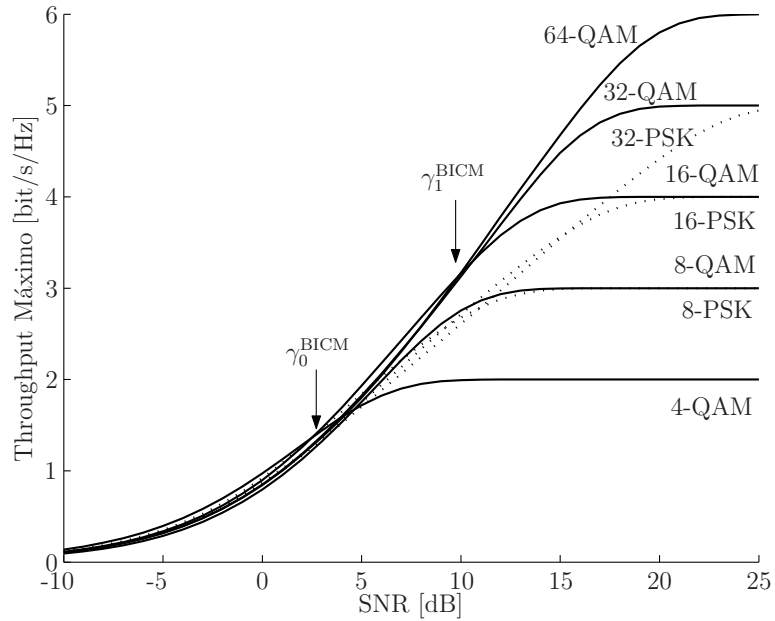


Figura 4.3. Capacidad BICM (\hat{C}) versus SNR para diferentes esquemas de modulación para un canal AWGN. M -QAM (líneas continuas) con $M \in \{4, 8, 16, 32, 64\}$ ó M -PSK (líneas punteadas) con $M \in \{8, 16, 32\}$.

consecuencia del desempeño sub-óptimo de los esquemas BICM.

El análisis anterior da respuesta a la problemática de seleccionar en forma óptima tanto el esquema de modulación como la tasa de código, sin embargo, este enfoque es desde un punto de vista de capacidad de canal, y por ende no es realista. En las siguientes secciones se analiza el modelo BICM desde un punto de vista más práctico.

4.3. Aplicación del Límite de Gallager

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en base al procedimiento presentado en el Capítulo 3. Estos resultados incluyen la determinación de los esquemas de modulación y tasas de código óptimos, se analiza el impacto del largo de bloque utilizado y el comportamiento de los umbrales de cambio de esquema de modulación. Finalmente se analiza el desempeño del sistema cuando se calculan las métricas en forma simplificada así como la

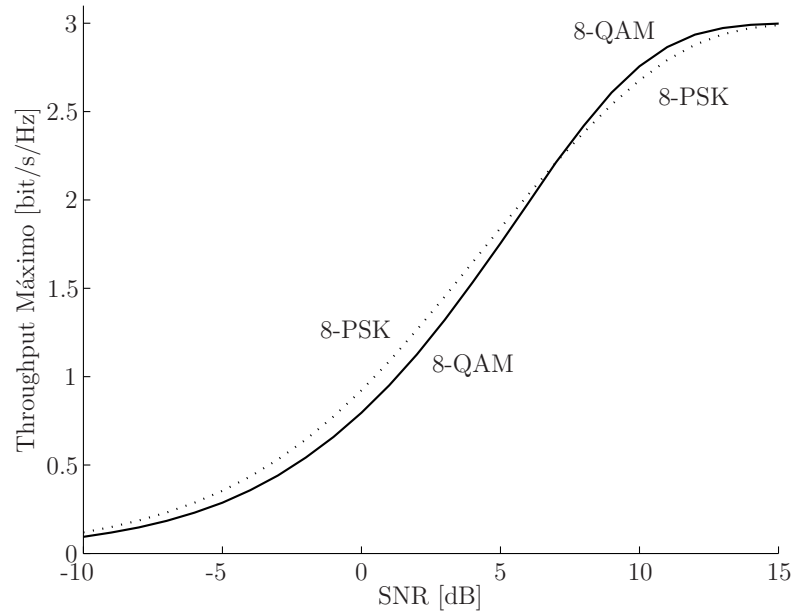


Figura 4.4. Comparación de capacidad BICM (\hat{C}) versus SNR para 8-PSK (líneas punteadas) y 8-QAM (líneas continuas) para un canal AWGN. Se destaca que no existe una constelación óptima en términos de capacidad de canal para todo el rango de SNR.

degradación producida al considerar un canal con desvanecimientos lentos.

4.3.1. Esquema de modulación y tasa de código óptimos

En esta sección se presentan los resultados al evaluar el GB para un largo de bloque a la salida del modulador $N_s = 1548^7$. En la Figura 4.5 se muestra una comparación entre la capacidad BICM (\hat{C}) y el máximo throughput encontrado al evaluar el GB (\bar{C}) para distintos esquemas de modulación en función de SNR. En estas figuras se puede apreciar la disminución en el máximo desempeño al considerar una codificación de largo finito. Adicionalmente también es posible notar que al utilizar el GB el comportamiento de los esquemas M -PSK en comparación con los esquemas M -QAM es idéntico que

⁷Este valor de N_s fue elegido para poder comparar con los resultados presentados en [28]

el comentado en la Sección 4.2.2 en el sentido de desempeño sub-óptimo de los esquemas M -PSK.

Luego de realizar el proceso de maximización del throughput respecto al esquema de modulación y tasa de código, de acuerdo a como se presentó en el Capítulo 3, fue posible encontrar los esquemas que maximizaban el throughput. Estos tres esquemas que maximizan el throughput son los mismos que fueron encontrados para el análisis de capacidad en la Sección 4.2.2, es decir, 4-QAM, 16-QAM, y 64-QAM. Los resultados comparativos se muestran en la Figura 4.6 en donde se aprecia la penalización que existe al considerar un largo de bloque limitado y no infinito como es el caso del análisis de capacidad. En esta figura se destacan los umbrales de cambio de esquema de modulación óptimos al utilizar el GB (γ_0^{GB} y γ_1^{GB}) los cuales se encuentran ubicados a la derecha de los umbrales de BICM debido a la restricción en el largo del bloque. En la Sección 4.3.3 se analiza esto con mayor detalle.

Junto al análisis de throughput, también se analizó la tasa de código que produce el máximo valor en el throughput. Los resultados comparativos para el análisis de capacidad y usando el GB se presentan en la Figura 4.7. En esta figura se aprecian discontinuidades en la tasa de código óptima lo cual se explica debido a la utilización de la AMC.

4.3.2. Restricciones en el largo del bloque

En este trabajo se analizan dos enfoques respecto al largo de las tramas:

- En primera instancia se supone que la cantidad de símbolos transmitidos por bloque (N_s) es constante. Esta suposición permite enfocar el análisis en un sistema TDMA donde el número de símbolos en la trama es fijo.
- Adicionalmente se analiza el caso en donde el bloque de bits de información (M) es de largo constante. Este segundo enfoque es útil para sistemas en donde capas superiores entreguen bloques de información de largo constante al codificador.

Para el caso de un largo de símbolos constante, en la Figura 4.8 se presenta el comportamiento del throughput máximo al evaluar el GB para tres distintos valores al utilizar las tres constelaciones óptimas. Los valores seleccionados son $N_s = 464$ inspirado en el largo de bloque de EDGE [2],

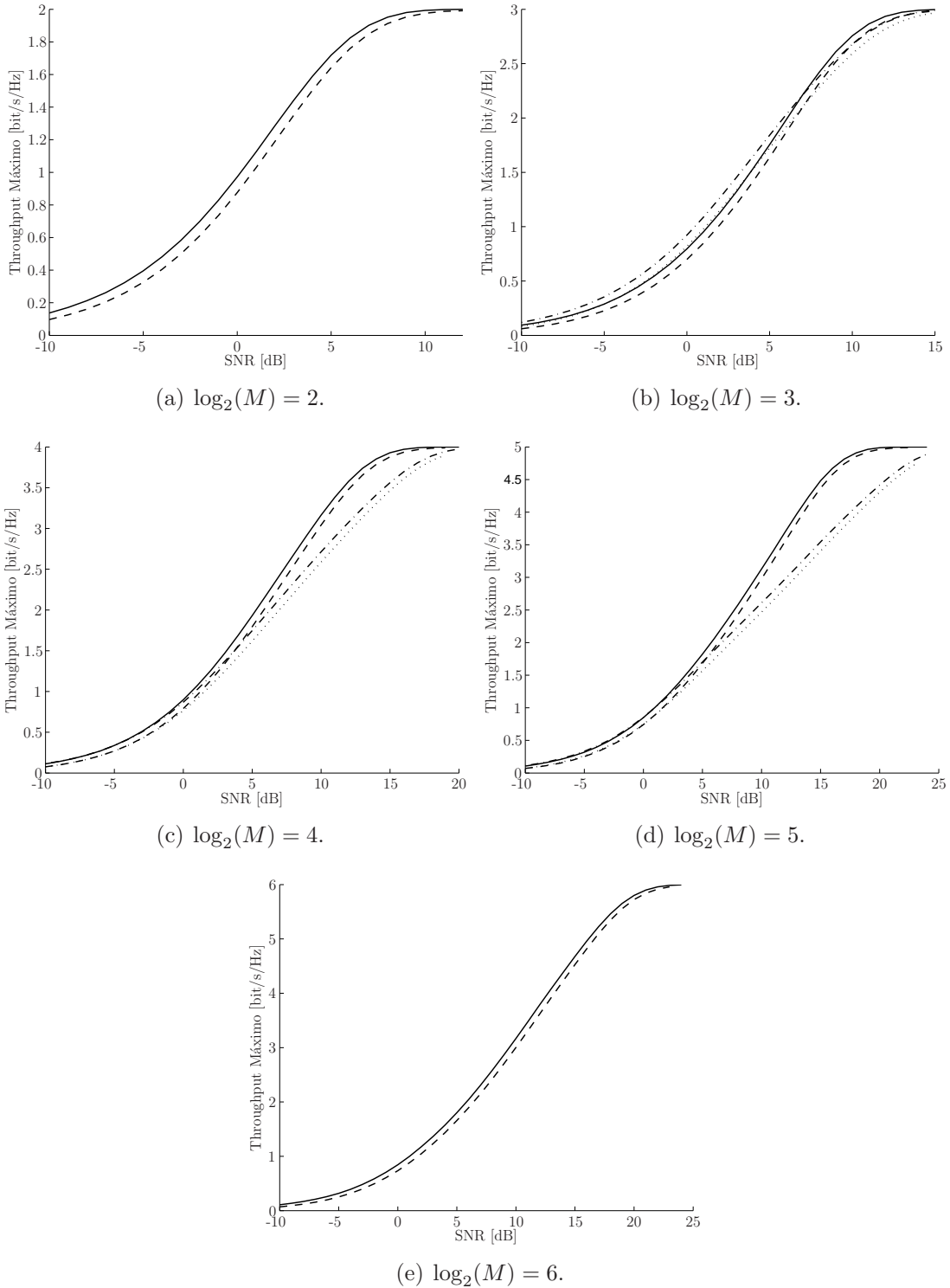


Figura 4.5. Comparación entre \bar{C} (líneas segmentadas y líneas punteadas para esquemas M-QAM y M-PSK respectivamente) y \hat{C} (líneas continuas y líneas punteadas y segmentadas para esquemas M-QAM y M-PSK respectivamente) en función de SNR para distintos esquemas de modulación.

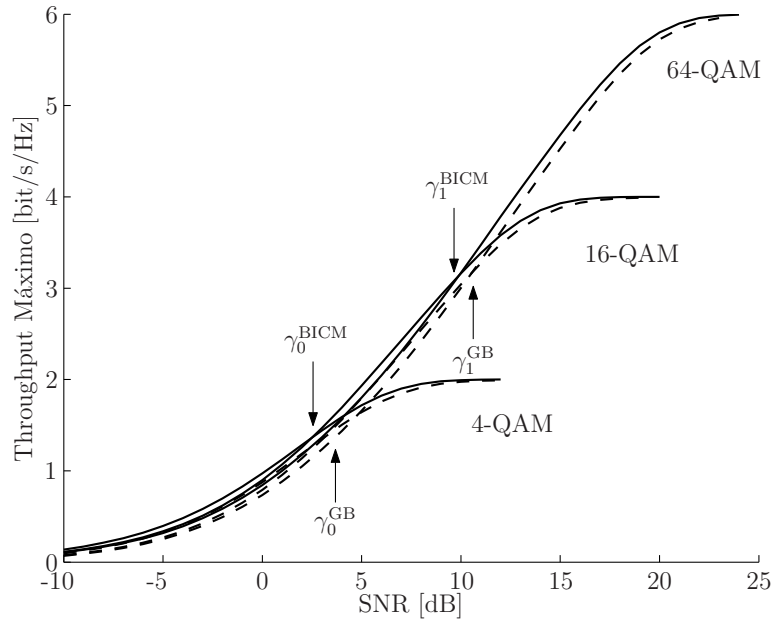


Figura 4.6. Throughput máximo utilizando el GB (\bar{C}) (líneas segmentadas) y capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) para los tres esquemas de modulación óptimos y un largo de bloque $N_s = 1548$.

$N_s = 1548$ tal como en [28], y $N_s = 15480$, comprobándose que a medida que $N_s \rightarrow 1548000$, $\bar{C} \rightarrow \hat{C}$ tal como se predijo en (3.8).

Se pudo comprobar, aún cuando no se muestra en las figuras, que para todo el rango de N_s analizado, es decir $464 \leq N_s < \infty$, la suposición de la existencia de sólo tres constelaciones óptimas se mantenía.

Para el segundo caso estudiado, es decir cuando se considera un bloque a la entrada del codificador de largo constante (M), se realizó el mismo análisis presentado anteriormente. Las conclusiones referentes a los esquemas de modulación óptimos fueron las mismas, variando solamente, y tal como era de esperarse, los valores de máximo throughput y las tasas de código óptimas. En la Figura 4.9 se muestra la comparación al considerar un largo de símbolos constante $N_s = 464$, y un largo de bloque de información constante $M = 464$.

En general, el comportamiento de las curvas al fijar el bloque de información constante, en comparación con una trama de símbolos constante, se puede resumir de la siguiente forma:

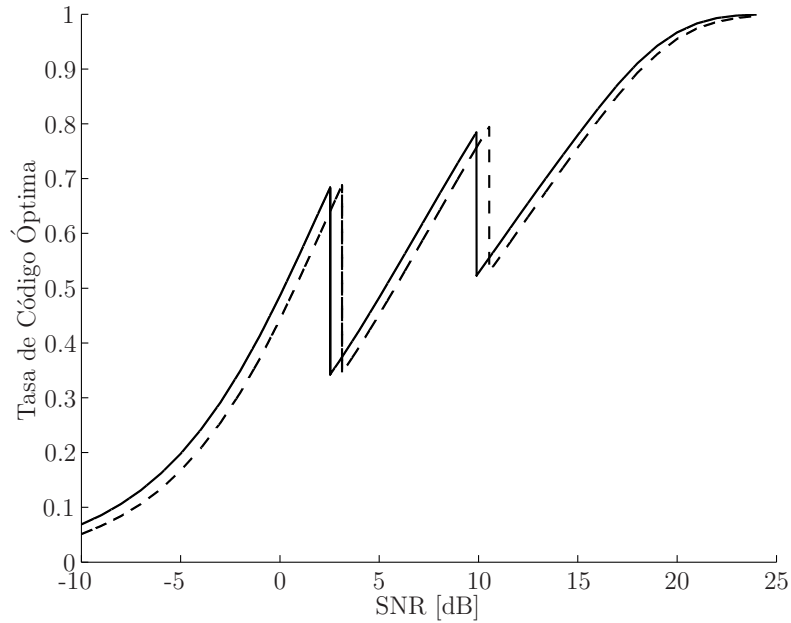


Figura 4.7. Tasas de Código óptimas para BICM (\hat{R}) (líneas continuas) y para el análisis usando el GB (\bar{R}) (líneas segmentadas) para los tres esquemas de modulación óptimos y un largo de bloque $N_s = 1548$.

- Para tasas de código bajas, la capacidad es mayor en el caso de $M = 464$ debido a que el largo de bloque a la salida del codificador N es mayor.
- Para tasas de código altas, la capacidad es menor en el caso de $M = 464$, pues el largo de bloque a la salida del codificador N es menor.

4.3.3. Comportamiento de los umbrales de cambio de esquema de modulación

Una vez analizados tanto el enfoque de capacidad, como el uso del GB para determinar el máximo desempeño que podría lograr el sistema, resulta interesante analizar el comportamiento de los umbrales de SNR en donde se debe cambiar entre los esquemas de modulación óptimos.

Para el caso de capacidad BICM, los valores encontrados para los puntos γ_0^{BICM} y γ_1^{BICM} los cuales fueron presentados en la Figura 4.3 de la Sección

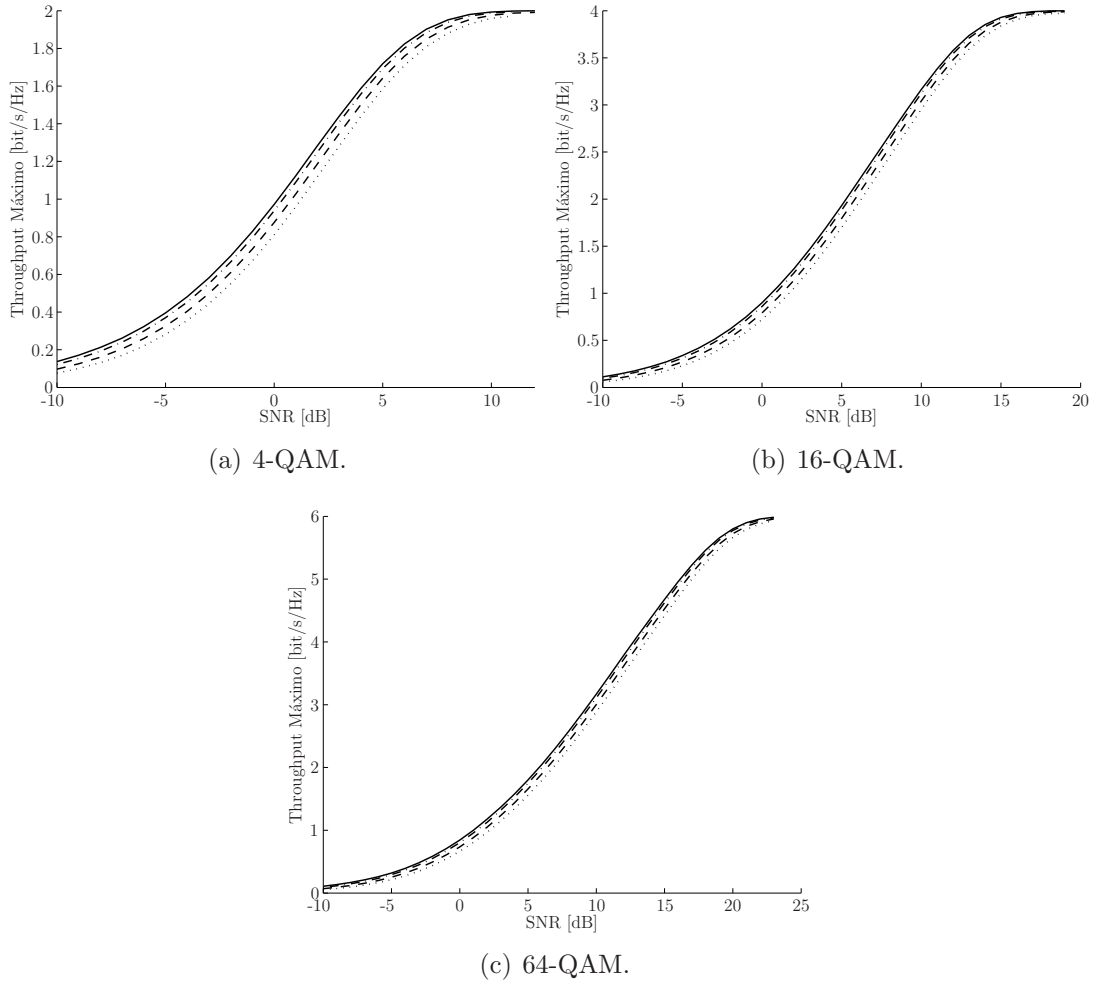


Figura 4.8. Dependencia del máximo throughput al evaluar el GB (\bar{C}) para $N_s = 464$ (línea punteada), $N_s = 1548$ (línea segmentada), y $N_s = 15480$ (línea segmentada y punteada) en comparación con la capacidad BICM (\hat{C}) (línea continua) para los tres esquemas de modulación óptimos.

4.2, se obtuvieron realizando una aproximación lineal entre dos valores de capacidad que se encontraban separados en 0.5 dB, y que estaban a la derecha e izquierda del punto en cuestión respectivamente. Con esto, se encontró que:

$$\gamma_0^{\text{BICM}} = 2,530 \text{ dB} \quad (4.1)$$

$$\gamma_1^{\text{BICM}} = 9,899 \text{ dB} \quad (4.2)$$

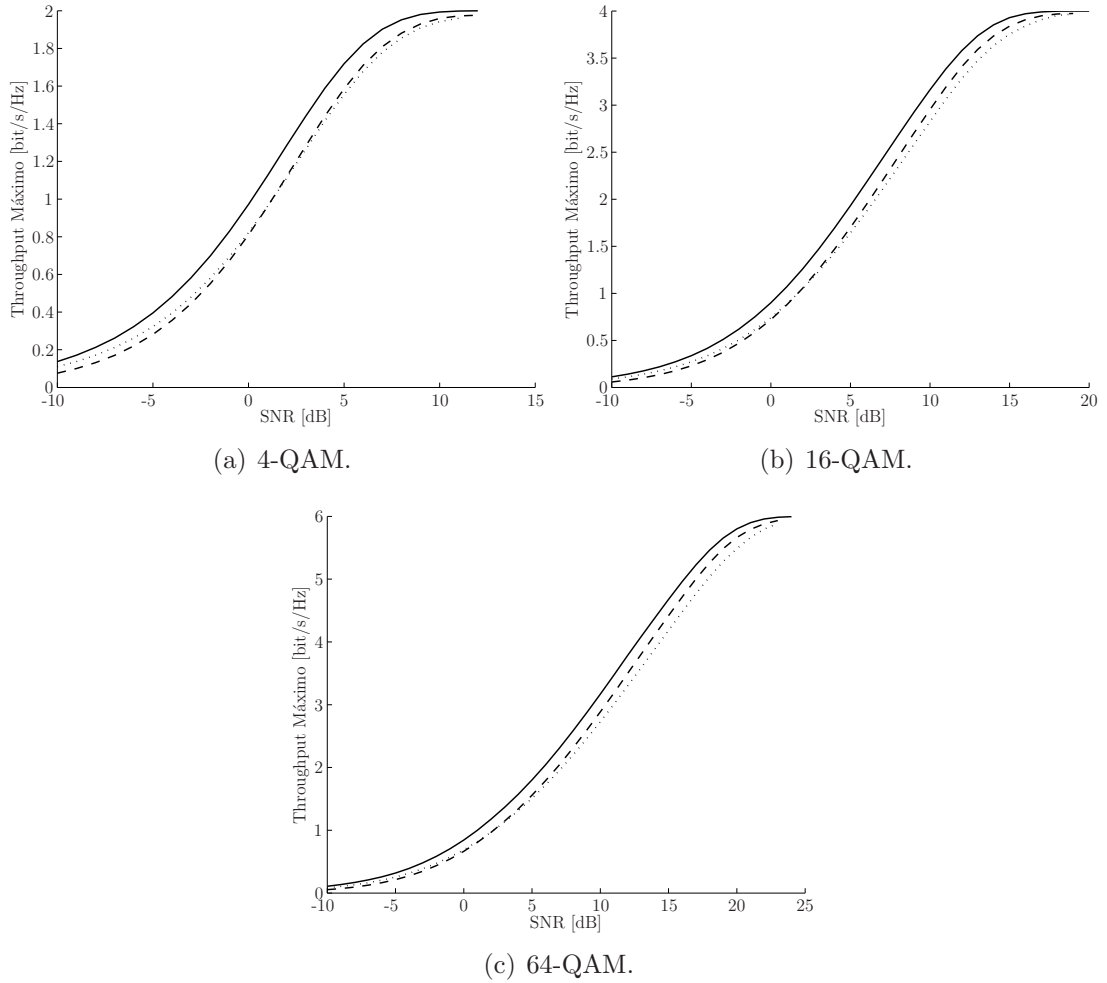


Figura 4.9. Comparación entre enfoque que considera un valor de M constante (líneas punteadas), el enfoque que considera un valor de N_s constante (líneas segmentadas) y la capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) para los tres esquemas de modulación óptimos. Para los tres casos se considera $M = N_s = 464$.

Para el GB que considera un largo de bloque variable, es posible calcular el umbral de corte entre los tres esquemas de modulación óptimos que han sido mostrados en la sección anterior, los cuales se definen como γ_0^{GB} y γ_1^{GB} . Se definen también $\gamma_0^{\text{GB}'}$ y $\gamma_1^{\text{GB}'}$ como los umbrales de cambio de esquema de

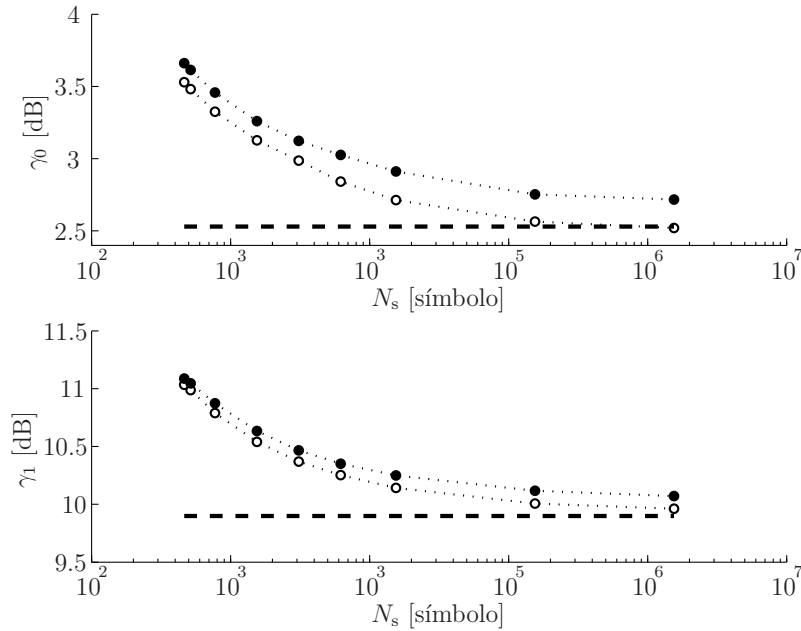


Figura 4.10. Umbrales de cambio de esquema de modulación γ_0 (arriba) y γ_1 (abajo) para diferentes largos de bloque obtenidos al evaluar el GB con métricas calculadas en forma exacta (2.47) (líneas punteadas con ‘o’) y con aproximación Max-Log (2.51) (líneas punteadas con ‘•’) y al utilizar el enfoque de capacidad BICM (líneas segmentadas).

modulación cuando se calculan las métricas en forma simplificada. Se destaca la dependencia que existe entre el largo de bloque utilizado y estos umbrales, a diferencia de lo que ocurre con el enfoque de capacidad BICM.

Con las curvas de máximo throughput asociadas al cálculo del GB presentadas en la Sección 4.3.2, y realizando nuevamente una aproximación lineal entre los puntos de Γ (separados en pasos de 0.2 dB), fue posible encontrar los valores de γ_0^{GB} , γ_1^{GB} , $\gamma_0^{\text{GB}'}$ y $\gamma_1^{\text{GB}'}$ para distintos valores de N_s , con $464 \leq N_s \leq 1548000$. El comportamiento de estos umbrales en función del largo de bloque se presenta en las Figura 4.10 donde se presenta además de con línea segmentada el umbral determinado de la capacidad BICM.

En la Figura 4.10 se aprecia que los umbrales del GB convergen hacia los umbrales de BICM a medida que N_s es suficientemente grande. Se aprecia además que cuando se utiliza la aproximación Max-Log los umbrales son

mayores que para el caso del cálculo exacto. De esta forma, se tiene que:

$$\gamma_i^{\text{BICM}} \leq \gamma_i^{\text{GB}} < \gamma_i^{\text{GB}'} \quad (4.3)$$

con $i = \{0, 1\}$.

Se destaca que en la ecuación (4.3) la desigualdad de la izquierda se hace igualdad para un N_s suficientemente grande, lo cual se justifica en base a la relación (3.8). Por otro lado, la desigualdad de la derecha es una desigualdad estricta debido a que siempre va a existir una pérdida en el throughput a causa de la aproximación Max-Log para SNR menores a 4 dB. Estas pérdidas se analizarán con mas detalle en la próxima sección. Finalmente entonces se puede concluir que aún cuando se aumente el valor de N_s , para el caso de usar las métricas simplificadas, siempre va a existir una brecha entre el umbral $\gamma_i^{\text{GB}'}$ y el umbral de capacidad BICM.

Se debe notar sin embargo, que aún cuando el análisis presentado en esta sección es consistente con todos los resultados obtenidos, desde un punto de vista práctico no es real pensar que con la tecnología actual se pueda estimar la SNR promedio con una precisión cercana a la décima parte de un decibel.

4.3.4. Uso de métricas simplificadas.

Al usar métricas simplificadas, tal como se muestra en la ecuación (3.9), existe una pérdida de información por el hecho de utilizar esta aproximación. En la Figura 4.11 se grafica el error relativo porcentual $\epsilon = (\bar{C} - \bar{C}')/\bar{C}$ entre el throughput calculado en forma exacta (\bar{C}) y en forma simplificada (\bar{C}').

Se destaca que para 4-QAM el error es cero debido a que no existe diferencia entre el cálculo exacto o aproximado de las LLR para 4-QAM lo cual se explica en base a que la constelación 4-QAM con mapeo Gray puede ser considerada como la superposición de dos constelaciones BPSK moduladas en parte real e imaginaria.

En la Figura 4.11 se destacan con líneas horizontales el rango de variación de los umbrales de cambio de esquema de modulación en base a los resultados mostrados en la Figura 4.10. Si bien se nota que los errores aumentan para bajas SNR y constelaciones mayores, en general la pérdida es siempre menor al 1 % debido a que 16-QAM y 64-QAM nunca serán utilizadas para SNR menores a 3 y 10 dB respectivamente. Esta conclusión no deja de ser importante pues indica que a pesar de que para bajas SNR sí existe una notoria degradación del desempeño, si se ajustan adecuadamente los umbrales de

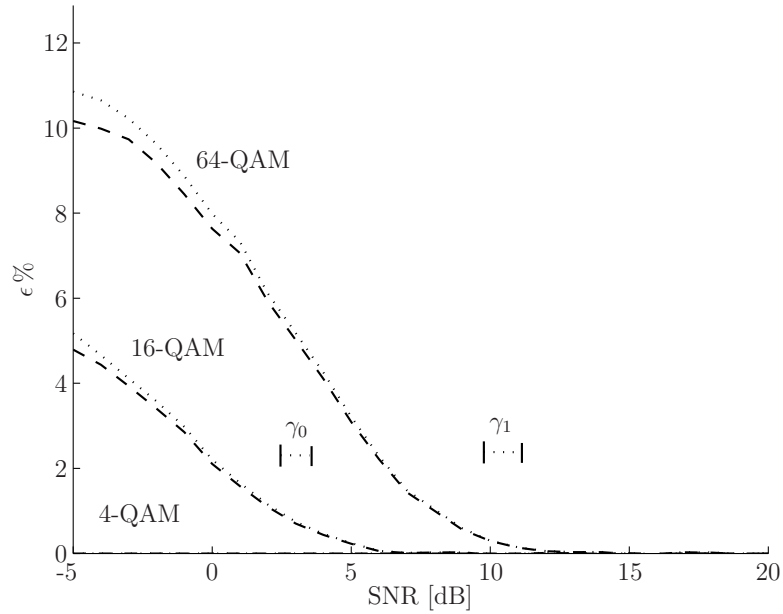


Figura 4.11. Error relativo porcentual ϵ entre \bar{C} y \bar{C}' para las 3 constelaciones óptimas y $N_s = 464$ (línea punteada) $N_s = 1548$ (línea segmentada).

cambio de esquema de modulación, esta degradación será siempre menor a un 1 %.

4.3.5. Canal con desvanecimientos lentos

Si se considera un canal con desvanecimientos lentos, es posible evaluar la degradación que se produce en esta situación de acuerdo a la ecuación (3.10) presentada en el Capítulo 3.

En la Figura 4.12 se muestra la comparación de throughput máximo promedio utilizando como base la curva maximizada sobre los esquemas de modulación para un canal AWGN. En esta figura se puede apreciar como disminuye el throughput promedio para 3 típicos escenarios donde K es el valor del factor K en veces de la distribución de Rice.

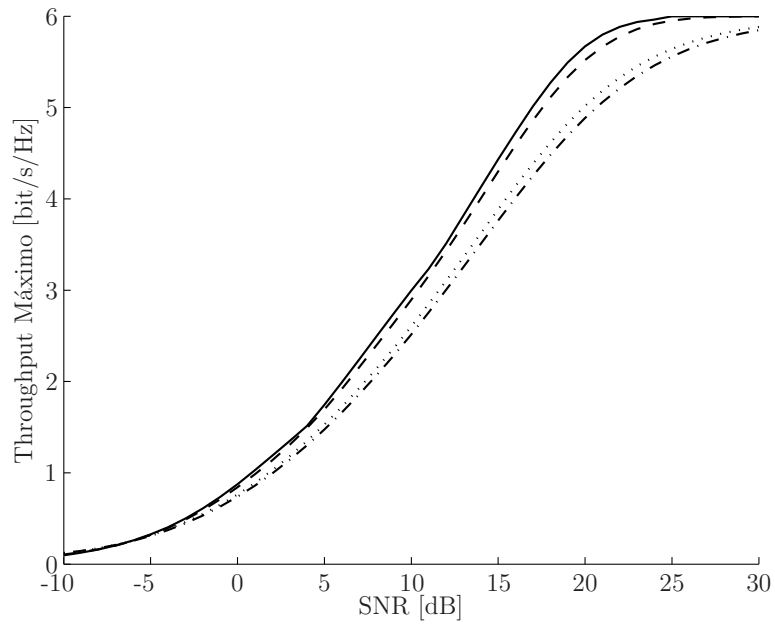


Figura 4.12. *Máximo throughput promedio para un canal con desvanecimientos lentos. Se comparan un canal Gaussiano (línea continua), un canal Rice con $K = 10$ (línea segmentada) un canal Rice con $K = 1$ (línea punteada) y un canal Rayleigh (línea segmentada y punteada).*

4.4. Comparación con Turbo Códigos

En esta sección se comparan los resultados numéricos obtenidos en las secciones anteriores con simulaciones de Turbo Códigos en base a los parámetros analizados en la Sección 2.4.

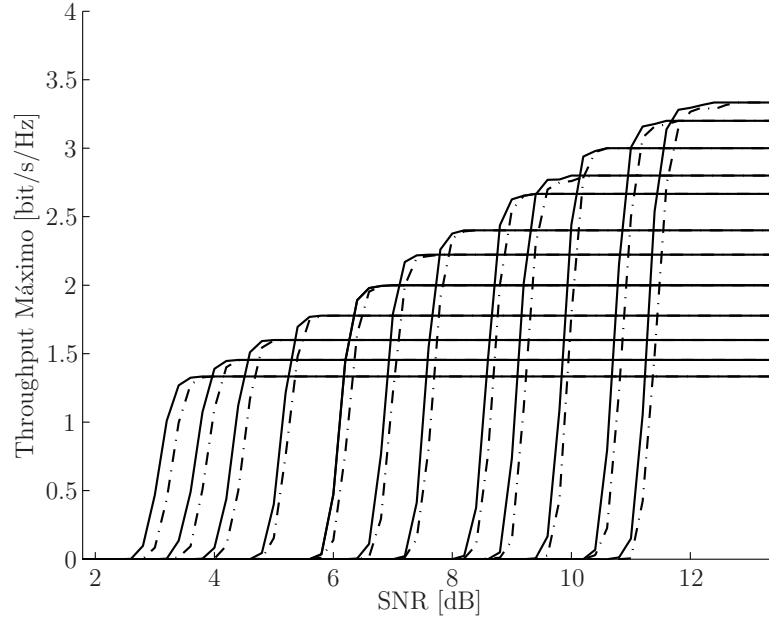


Figura 4.13. Comparación entre algoritmos de decodificación Log-MAP (líneas sólidas) y Max-Log-MAP (líneas punteadas y segmentadas) para un TC con distintas tasas de código, un largo de bloque $N_s = 1548$ y modulación 16-QAM.

4.4.1. Selección de los parámetros

En la Figura 4.13 se presenta una comparación realizada a nivel de throughput para los algoritmos Log-MAP y Max-Log-MAP presentados en la Sección 2.4.3. Se pudo comprobar que el tiempo de simulación al utilizar el algoritmo Log-MAP era aproximadamente tres veces mayor que al utilizar el algoritmo Max-Log-MAP, y tal como se muestra en la Figura 4.13, las ganancias en términos de throughput son menores a 0.5 dB. Debido a lo anterior, se decidió utilizar el algoritmo Max-Log-MAP en la simulación de los TC.

Por otro lado, se decidió considerar en la decodificación 10 iteraciones, debido a que aumentar más este número no contribuirá mayormente a mejorar el desempeño del código, a expensas de aumentar el tiempo de simulación.

Finalmente, se debe mencionar que para cada punto de las curvas de BLER calculadas, se contaron al menos 200 errores de bloque de tal forma de que las curvas encontradas sean confiables.

4.4.2. Resultados obtenidos

En las Figuras 4.14 y 4.15 se presentan, junto a la capacidad BICM (\hat{C}) y el máximo throughput (\tilde{C}), los resultados obtenidos de las simulaciones de los TC para las doce distintas tasas de código consideradas, para los tres esquemas de modulación óptimos, y para un largo de bloque $N_s = 1548$ y $N_s = 464$ respectivamente. En estas figura se aprecia que adaptando la tasa de código en pasos discretos razonablemente pequeños, se puede lograr maximizar el throughput prácticamente en forma continua.

En estas figuras se puede apreciar la cercanía que existe el máximo throughput logrado por los TC y la predicción hecha por \bar{C} . En general esta diferencia ese cercana a 1 dB para los tres esquemas de modulación, mientras que al comparar con \hat{C} el resultado es cercano a 2 dB.

Si se realiza el proceso de maximización del throughput para las curvas de los turbo códigos simulados, tomando la envolvente de la curva para cada esquema de modulación, es decir elegir el máximo valor del throughput para cada valor de SNR, es posible determinar el máximo throughput que estos TC logran si se cambia adecuadamente la tasa de código utilizada. Comparando estas tres envolventes para las tres constelaciones, es posible determinar los umbrales de cambio de esquema de modulación óptimos para los TC. Estos resultados son resumidos en la Tabla 4.2 para un largo de bloque $N_s = 1548$ y en la Tabla 4.3 para $N_s = 464$. De los resultados mostrados en estas tablas se aprecia que el pronóstico de los umbrales de cambio de esquema de modulación dados por el análisis basado en el GB son más precisos que los de BICM, y que en general el error en la predicción es cercano a 1 dB.

Se destaca que la maximización del throughput requerirá un cambio de constelación, de acuerdo a los umbrales de las Tablas 4.2 y 4.3 bastante menos frecuente que lo que ocurrirá para el cambio de las tasas de codificación, las que deberán adaptarse varias veces dentro de cada rango de relación señal a ruido, para cada constelación.

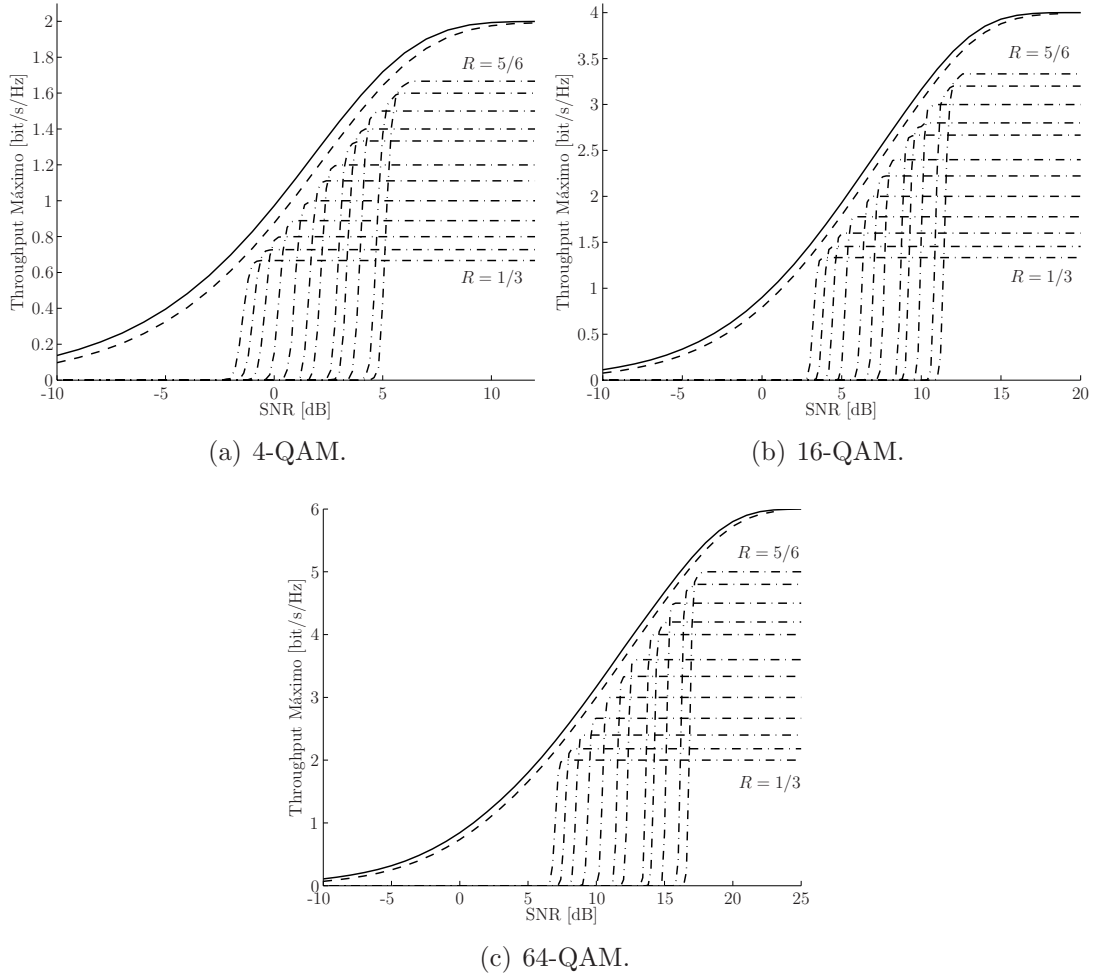


Figura 4.14. Throughput obtenido utilizando los TC para las tasas mostradas en a Tabla 6.1 del Anexo C para los tres esquemas de modulación óptimos (líneas segmentadas y punteadas) y un largo de bloque de $N_s = 1548$, comparado con la capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) y el máximo throughput (\tilde{C}) (líneas segmentadas).

Tabla 4.2. Tabla resumen de los umbrales de cambio de modulación deducidos del análisis de capacidad (CM, BICM), del GB, y de las simulaciones de los TC para un largo de bloque $N_s = 1548$.

	\tilde{C}	\hat{C}	\bar{C}	Simulaciones
γ_0	-	2.53 dB	3.13 dB	4.68 dB
γ_1	-	9.90 dB	10.54 dB	11.74 dB

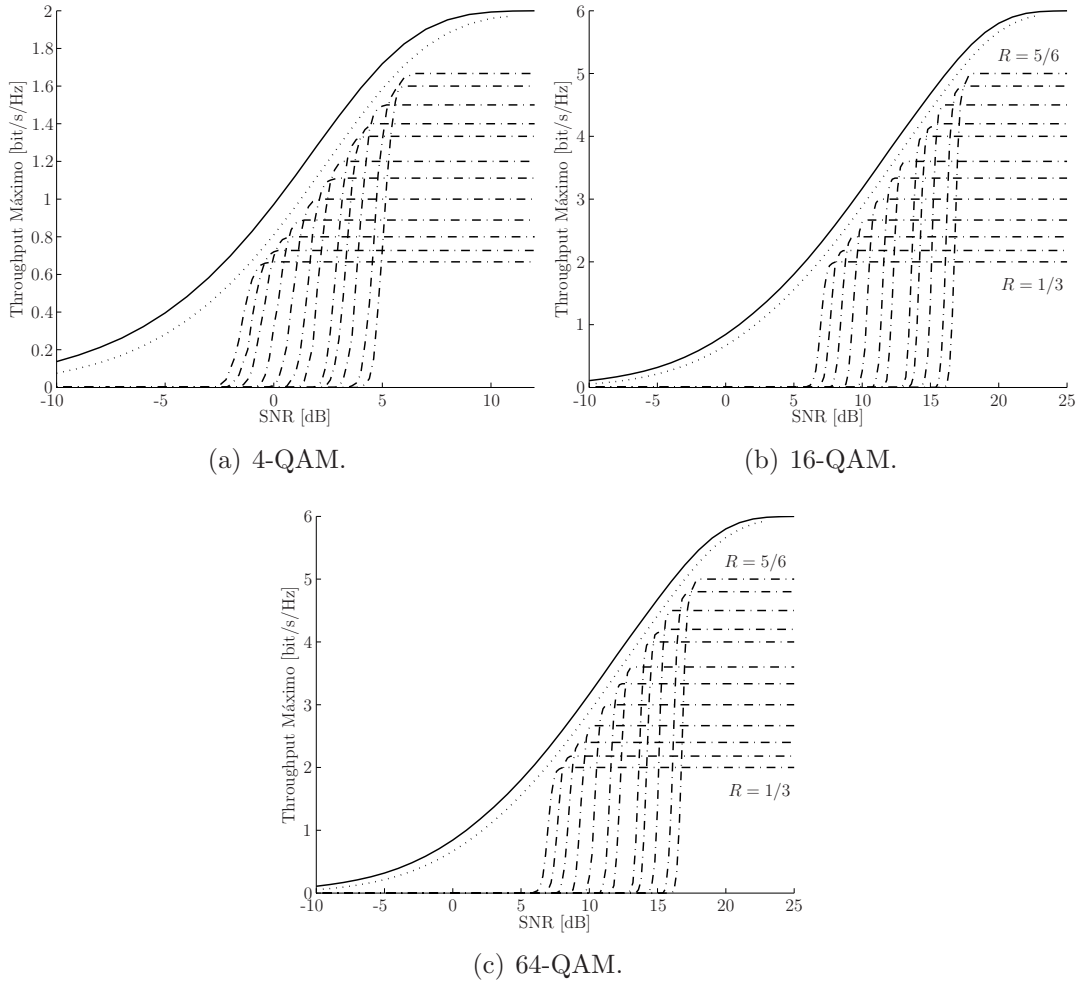


Figura 4.15. *Throughput obtenido utilizando los TC para las tasas mostradas en a Tabla 6.1 del Anexo C para los tres esquemas de modulación óptimos (líneas segmentadas y punteadas) y un largo de bloque de $N_s = 464$, comparado con la capacidad BICM (\hat{C}) (líneas continuas) y el máximo throughput (\tilde{C}) (líneas punteadas).*

Tabla 4.3. *Tabla resumen de los umbrales de cambio de modulación deducidos del análisis de capacidad (CM, BICM), del GB, y de las simulaciones de los TC para un largo de bloque $N_s = 464$.*

	\tilde{C}	\hat{C}	\bar{C}	Simulaciones
γ_0	-	2.53 dB	3.53 dB	4.91 dB
γ_1	-	9.90 dB	11.03 dB	11.97 dB

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se ha presentado una herramienta de análisis basada en el Límite de Gallager que permite dar respuesta a varias interrogantes referente a un sistema BICM que puede adaptar la tasa de código y el esquema de modulación sobre un canal AWGN.

En primera instancia, se extendió el análisis presentado en [31] para una amplia gama de esquemas de modulación mostrándose que la AMC es consecuencia del desempeño sub-óptimo de un sistema BICM. Se mostró además el desempeño sub-óptimo de las constelaciones M -PSK en comparación con las M -QAM desde un punto de vista de capacidad de canal, así como también se demostró que de todas las constelaciones analizadas, sólo son necesarias tres de ellas para maximizar la capacidad de canal sobre todo el rango de SNR de interés.

Luego, y en base a la herramienta de análisis desarrollada en este trabajo, se determinaron el esquema de modulación y tasa de código óptimos en un sistema que utiliza AMC sobre un canal AWGN cuasi-estático en función de la SNR, se analizó el impacto al considerar un largo de bloque finito y al utilizar métricas calculadas en forma simplificada, y se contrastaron los resultados con los análisis de capacidad existentes en la literatura.

Se analizó el comportamiento de los umbrales de cambio de esquema de modulación en función del largo de bloque utilizado en la transmisión, tanto para el análisis de capacidad, como al utilizar el GB con cálculo de métricas en forma exacta y aproximada.

Finalmente se se contrastaron los resultados teóricos con simulación de códigos potentes con aplicaciones prácticas, específicamente con los populares Turbo Códigos. Las simulaciones mostraron el excelente desempeño que estos

códigos logran y cómo se acercan a los límites encontrados en el análisis.

Dentro de los resultados más relevantes se destacan que las pérdidas en el desempeño del sistema al utilizar métricas simplificadas son menores a un 1 % si se ajustan los parámetros de forma adecuada, que la predicción de los umbrales de cambio de esquema de modulación para TC fue más precisa que los análisis basados en capacidad de canal, que si se adapta la tasa de código de los TC en pasos discretos razonablemente pequeños se puede lograr maximizar el throughput casi en forma continua, y que existen tres esquemas de modulación que maximizan el throughput independiente del largo de bloque utilizado.

Bibliografía

- [1] J. F. Hayes, “Adaptive feedback communications,” *IEEE Transactions on Communications Technology*, vol. 16, no. 1, pp. 29–34, Feb. 1968.
- [2] 3GPP., “Digital cellular telecommunications system (phase 2+); GSM/EDGE radio access network (GERAN) overall description; stage 2,” ETSI, Tech. Rep. 3GPP TS 43.051 version 5.10.0 Release 5, Aug. 2003.
- [3] 3GPP, “Universal mobile telecommunications system (UMTS); multiplexing and channel coding (FDD),” ETSI, Tech. Rep. 3GPP TS 25.212 version 6.0.0 Release 6, Dec. 2003.
- [4] E. Armanious, D. D. Falconer, and H. Yanikomeroglu, “Adaptive modulation, adaptive coding, and power control for fixed cellular broadband wireless systems: Some new insights,” in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, vol. 4, no. 1, Mar. 2003, pp. 238–242.
- [5] H. Matsuoka, S. Sampei, N. Morinaga, and Y. Kamio, “Adaptive modulation system with variable coding rate concatenated code for high quality multi-media communication systems,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 1, pp. 487–491, May 1996.
- [6] A. Goldsmith and S.-G. Chua, “Adaptive coded modulation for fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 5, pp. 595–602, May 1998.
- [7] A. Goldsmith and S. Chua, “Variable-Rate Variable-Power MQAM for Fading Channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 45, no. 10, pp. 1218–1230, Oct. 1997.
- [8] B. Myhre, V. Markhus, and G. Oien, “LDPC coded adaptive multilevel modulation for slowly varying Rayleigh-fading channels,” in *IEEE Norwegian Symposium on Signal Processing*, Oct. 2001, pp. 129–134.
- [9] K.-B. Song, A. Ekbal, S. T. Chung, and J. M. Cioffi, “Adaptive modulation and coding (AMC) for bit-interleaved coded OFDM (BIC-OFDM),” Nov. 2003, submitted to *IEEE Trans. on Wireless Commun.* [Online]. Available: <http://www.stanford.edu/~ekbal/pubs/icc04-kbsong.pdf>

- [10] M. H. Ahmed, H. Yanikomeroglu, D. Falconer, and S. Mahmoud, "Performance enhancement of joint adaptive modulation, coding and power control using cochannel-interferer assistance and channel reallocation," in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, vol. 4, no. 1, Mar. 2003, pp. 306–310.
- [11] H. M. Tullberg and P. H. Siegel, "Bit-interleaved coded modulation for delay-constrained mobile communication channels," in *IEEE Vehicular Technology Conference*, vol. 3, May 2000, pp. 2212–2216.
- [12] S. T. Chung and A. J. Goldsmith, "Degrees of freedom in adaptive modulation: A unified view," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 9, pp. 1561–1571, Sept. 2001.
- [13] J. K. Cavers, "Variable-rate transmission for Rayleigh fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 20, no. 1, pp. 15–22, Feb. 1972.
- [14] B. Vucetic, "An adaptive coding scheme for time-varying channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 39, no. 5, pp. 653–663, May 1991.
- [15] S. Otsuki, S. Sampei, and M. Morinaga, "Square-qam adaptive modulation/TDMA/TDD systems using modulationlevel estimation with walsh function," *Electronics Letters*, vol. 31, no. 3, pp. 169–171, Feb. 1995.
- [16] W. T. Webb and R. Steele, "Variable rate QAM for mobile radio," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, no. 7, pp. 2223–2230, July 1995.
- [17] Y. Kamio, S. Sampei, H. Sasaoka, and N. Morinaga, "Performance of modulation-level-controlled adaptive-modulation under limited transmission delay time for land mobile communications," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 1, pp. 221–225, July 1995.
- [18] S. M. Alamouti and S. Kallel, "Adaptive trellis-coded multiple-phase-shift keying for Rayleigh fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 6, pp. 2305–2314, June 1994.
- [19] T. Ue, S. Sampei, and N. Morinaga, "Symbol rate and modulation level controlled adaptivemodulation/TDMA/TDD for personal communication systems," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 1, pp. 306–310, July 1995.

- [20] K.-B. Song, A. Ekbal, and J. M. Cioffi, “Adaptive modulation and coding (AMC) for bit-interleaved coded OFDM (BIC-OFDM),” in *IEEE International Conference on Communications*, vol. 6, June 2004, pp. 3197–3201.
- [21] S. Vishwanath and A. J. Goldsmith, “Adaptive turbo-coded modulation for flat-fading channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 6, pp. 964–972, June 2003.
- [22] J. Torrance, D. Didascalou, and L. Hanzo, “The potential and limitations of adaptive modulation over slow Rayleigh fading channels,” in *IEE Colloquium*, vol. 10, Dec. 2002, p. 1.
- [23] H. Holm, G. Øien, M.-S. Alouini, D. Gesbert, and K. Hole, “Optimal design of adaptive coded modulation schemes for maximum average spectral efficiency,” in *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, July 2003, pp. 403–407.
- [24] T. Ue, S. Sampei, N. Morinaga, and K. Hamaguchi, “Symbol rate and modulation level-controlled adaptive modulation/TDMA/TDD system for high-bit-rate wireless data transmission,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 47, no. 4, pp. 1134–1147, Nov. 1998.
- [25] J. F. Paris, M. del Carmen Aguayo-Torres, and J. T. Entrambasaguas, “Optimum discrete-power adaptive QAM scheme for Rayleigh fading channels,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, no. 7, pp. 281–283, July 2001.
- [26] A. J. Goldsmith and P. P. Varaiya, “Capacity of fading channels with channel side information,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, no. 6, pp. 1986–1992, Nov. 1997.
- [27] A. Viterbi and J. Omura, *Principles of Digital Communication and Coding*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [28] F. Babich, “On the performance of efficient coding techniques over fading channels,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 3, no. 1, pp. 290–299, Jan. 2004.
- [29] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication.” *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379–423, 1948.

- [30] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*. New York: Wiley Series in Telecommunications, John Wiley & Sons, 1991.
- [31] G. Caire, G. Taricco, and E. Biglieri, “Bit-interleaved coded modulation,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 3, pp. 927–946, May 1998.
- [32] G. Ungerboeck, “Channel coding with multilevel/phase signals,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, no. 1, pp. 55–67, Jan. 1982.
- [33] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, “Near shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes,” in *IEEE International Conference on Communication*, May 1993, pp. 1064–1070.
- [34] C. Berrou and A. Glavieux, “Near shannon limit error-correcting coding and decodig: Turbo-codes,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 10, pp. 1261–1271, Oct. 1996.
- [35] C. Schlegel and L. Pérez, “On error bounds and turbo-codes,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 3, no. 7, pp. 205–207, July 1999.
- [36] A. Burr, *Modulation and Coding for Wireless Communications*. Cornwall: Prentice Hall, 2001.
- [37] R. Aros and T. Valencia, “Análisis, simulación y evaluación de turbo códigos con aplicación en radio comunicaciones,” Universidad Técnica Federico Santa María, Tech. Rep., Nov. 2004.
- [38] O. Açikel and W. Ryan, “Punctured turbo-codes for BPSK/QPSK channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, no. 9, pp. 1315–1323, Sept. 1999.
- [39] M. A. Kousa and A. H. Mugaibel, “Puncturing effects on turbo codes,” in *IEE Proceedings - Communications*, vol. 149, no. 3, June 2002, pp. 132–138.
- [40] L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimising symbol error rate,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 20, pp. 284–287, Mar. 1974.
- [41] P. Robertson, E. Villebrun, and P. Hoeher, “A comparison of optimal and sub-optimal map decoding algorithms operating in the log domain,” in *IEE Proceedings - Communications*, vol. 2, June 1995, pp. 1009–1013.

- [42] S. L. Goff, A. Glavieux, and C. Berrou, “Turbo codes and high spectral efficiency modulation,” in *IEEE International Conference on Communications*, May 1994, pp. 645–649.
- [43] M. S. Raju, A. Ramesh, and A. Chockalingam, “LLR based BER analysis o orthogonal STBCs using QAM on Rayleigh fading channels,” in *IEEE International Symposium on Personal, Indoor & Mobile Radio Communications*, vol. 3, Sept. 2004, pp. 2008–2012.
- [44] M. Benjillali, L. Szczecinski, and S. Aissa, “Exact evaluation of bit error rate for packet combining with constellation rearrangement,” Institut National de la Recherche Scientifique-EMT, Tech. Rep., July 2005.
- [45] C. Hermosilla, “Evaluación de desempeño de turbo receptores por medio de análisis exit,” Ph.D. dissertation, Universidad Técnica Federico Santa María, Mar. 2005.
- [46] R. G. Gallager, “A simple derivation of the coding theorem and some applications,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 11, no. 1, pp. 3–8, Jan. 1965.
- [47] S. Shamai and I. Sason, “Variations on the gallager bounds, connections, and applications,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 48, no. 12, pp. 3029–3051, Dec. 2002.
- [48] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- [49] M. Tüchler, A. Singer, and R. Koetter, “Minimum mean squared error equalization using A priori information,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 673–683, Mar. 2002.
- [50] E. Agrell, J. Lassing, E. Ström, and T. Ottosson, “On the optimality of the binary reflected gray code,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 50, no. 12, pp. 3170–3182, Dec. 2004.
- [51] L. Hanzo, C. Wong, and M. Yee, *Adaptive Wireless Transceivers*, 1st ed. New York: Wiley and IEEE Press, 2002.
- [52] C. Wang, “Improved metric for binary turbo decoding using M-ary PSK signals,” in *IEEE Wireless Communications and Networking*, vol. 1, Mar. 2003, pp. 711–714.

Capítulo 6

Anexos

6.1. Anexo A: Constelaciones utilizadas

En las siguientes tablas se presentan las constelaciones utilizadas en este trabajo [45] [49] [50] [51] [52].

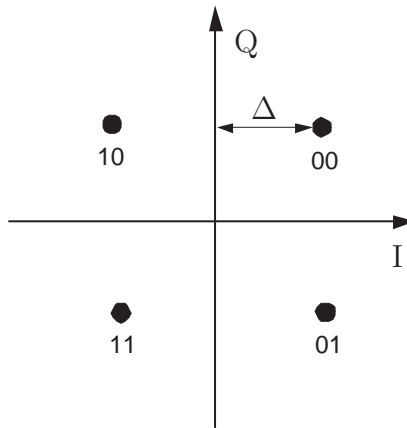


Figura 6.1. Constelación 4-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{2}$.

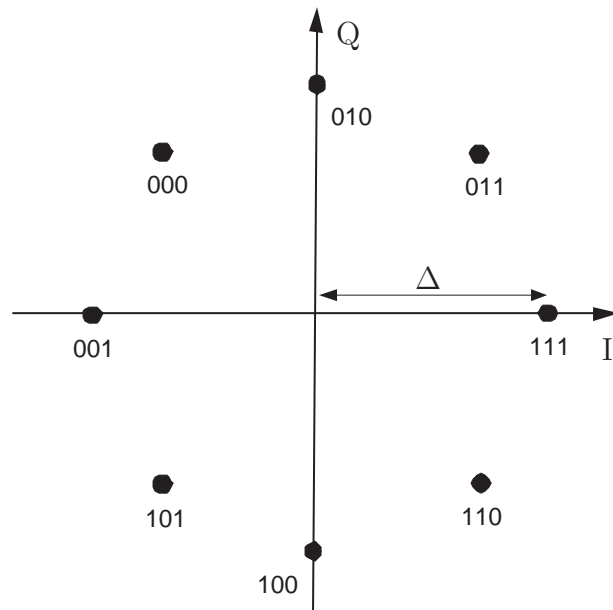


Figura 6.2. Constelación 8-PSK. $\Delta = 1$.

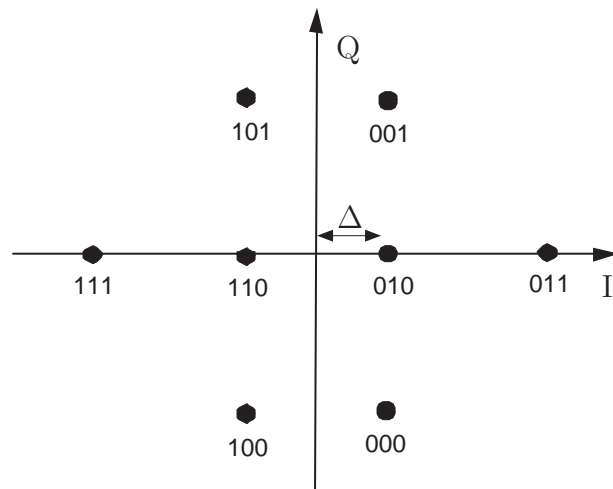


Figura 6.3. Constelación 8-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{5}$.

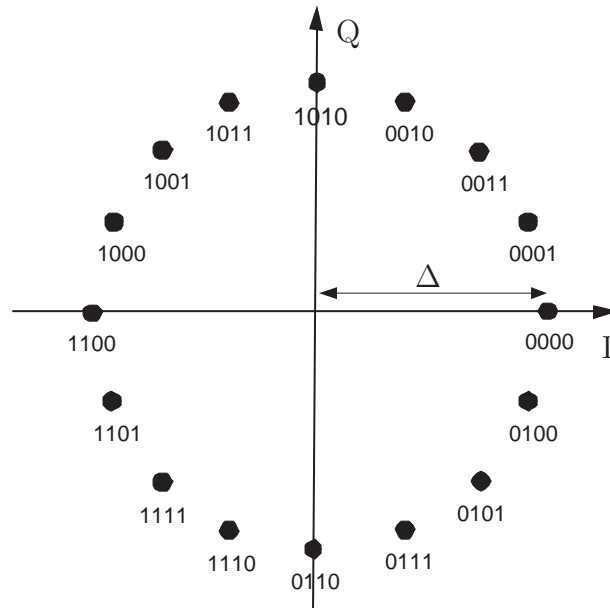


Figura 6.4. Constelación 16-PSK. $\Delta = 1$.

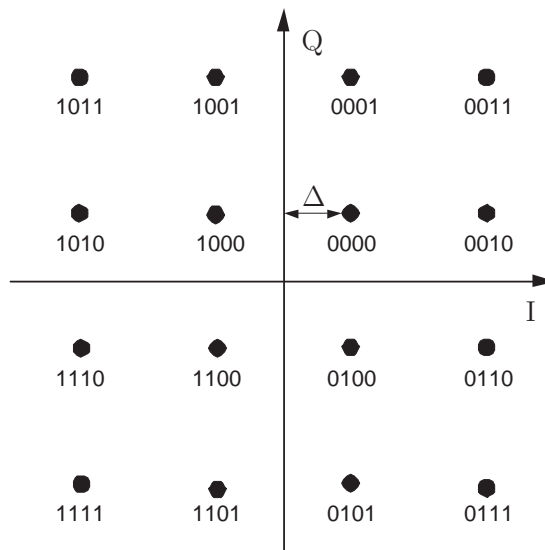


Figura 6.5. Constelación 16-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{10}$.

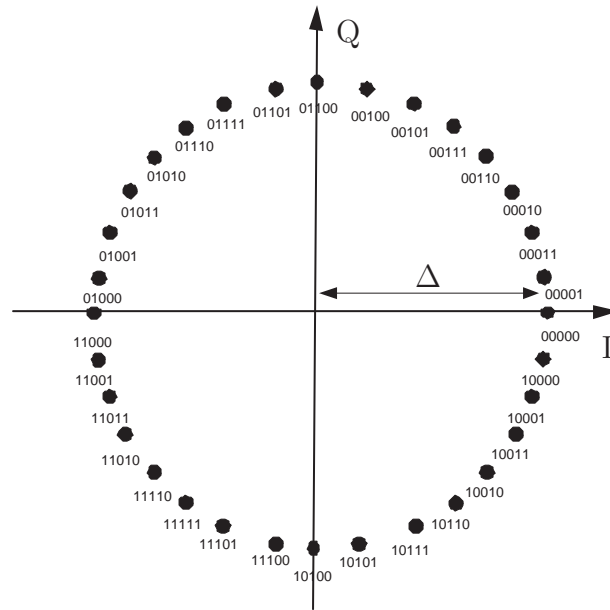


Figura 6.6. Constelación 32-PSK. $\Delta = 1$.

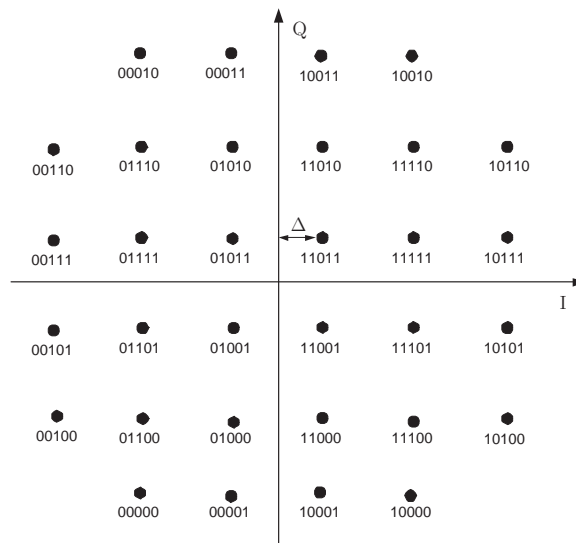


Figura 6.7. Constelación 32-QAM. $\Delta = \sqrt{5}/10$.

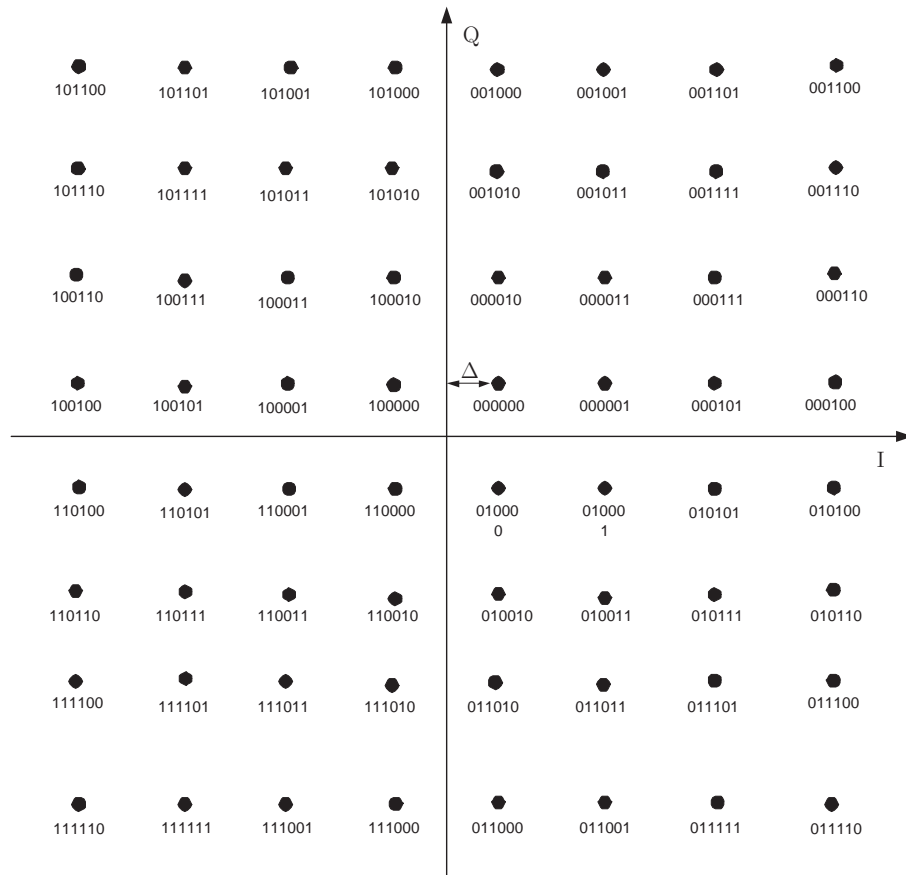


Figura 6.8. Constelación 64-QAM. $\Delta = 1/\sqrt{42}$.

6.2. Anexo C: Parámetros utilizados en los Turbo Códigos

Tabla 6.1. *Resumen de patrones de perforado utilizados en las simulaciones.*

R	$P(q, p)$	\mathbf{P}
1/3	$\bar{P}(0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
4/11	$\bar{P}(2, 5)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
2/5	$\bar{P}(2, 3)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4/9	$\bar{P}([2; 4; 7], [3; 5; 8])$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
1/2	$P(2, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
5/9	$P([2; 4; 7; 9], [1; 4; 6; 8])$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
6/10	$P([2; 4], [3; 5])$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2/3	$P(2, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
7/10	$P([1; 5; 10], [3; 8; 12])$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3/4	$P(2, 4)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4/5	$P(2, 7)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
5/6	$P(2, 2)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$